

## 生産関数が convex-concave である場合に おける資本ストックの最適成長経路

---

筒井 修二

### はじめに

生産関数が収穫逓増の部分を持つ場合、すなわち生産関数が convex-concave であるときの最適成長理論には、Skiba [1], Dechert, Nishimura [2], Benhabib, Majumdar, Nishimura [3] 等が知られている。このうち Skiba [1] は、微分方程式を用いた連続モデルを使って、最適成長経路の位相図を分析している。そこでの主要な結論は、新古典派の concave な生産関数の場合と異なり、資本ストックが 0 に収束していく最適な経路が存在するということである。また、初期の資本ストックの大きさには臨界点があり、それを下回る場合には 0 に収束する経路が最適なものになることが示されている。次に、Dechert, Nishimura [2] においては、離散モデル (discrete time model) の下で、最適性原理 (principle of optimality) を用いた分析が展開されている。そこでは、最適経路の単調性や資本ストックが 0 もしくは正の値に収束するかどうかを分ける臨界点の存在が議論されている。彼らの分析は、利子率や割引率のとりうる全ての場合を考察しているという意味で complete characterization of optimal growth paths と呼ばれている。一方 Benhabib, Majumdar, Nishimura [3] においては、2 部門成長モデルを用い

て、離散モデルの下での最適成長に関する同様の分析が展開されている。

本稿は、連続モデルを用いて、利子率や割引率等のパラメータが様々な値をとる場合に Skiba [1] の分析を拡張した分析を展開する。議論を分かりやすくするために、位相図を多用して議論を進める。

本稿の構成は、第1節においては後の節の分析と比較対照するために、生産関数が concave である場合の従来の新古典派的最適成長理論を整理して述べる。第2節においては、生産関数が convex-concave である場合の最適成長理論を、Skiba [1] に基づきながら解説する。第3節においては、Skiba [1] が分析しなかったケースも含めて、パラメータが様々な値をとる場合の complete characterization of optimal growth paths を分岐図の形にまとめる。

## 第1節

この節では、第2節以降のモデルとの比較のために、新古典派の1部門最適成長理論の標準的なモデルを簡単に振り返ってみよう。

いま代表的な家計の効用関数を  $u(c)$  とし、将来の効用に関する割引率を  $\rho$  とするとき、計画の初期時点を0時点とする無限の将来にわたる社会的な最適化問題は、通常以下のように定式化される。

$$(1) \quad \text{Max} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c) dt$$

$$(2) \quad \dot{k} = f(k) - (\delta + n)k - c$$

$$(3) \quad k(0) = k_0$$

ここで変数の  $c$ ,  $k$  はそれぞれ一人当たりの消費量と一人当たりの資本ストックを表し、時間  $t$  の関数である。 $k_0$  は初期時点における一人当たりの資本ストック量である。また  $\delta$  と  $n$  は、それぞれ資本ストックの減耗率と労働人口の成長率を表すパラメータである。なお変数の上に  $\cdot$  を付けて、時間に関する変化率を表している。ここで割引率の  $\rho$  と減耗率の  $\delta$  は、

$$(4) \quad 0 < \rho < 1, 0 < \delta < 1$$

と想定される。さらに、効用関数は一般に限界効用逓減であると、すなわち

$$(5) \quad u'(c) > 0, u''(c) < 0$$

と仮定される。ところで、(2)の $f(k)$ は生産関数を示しており、通常の場合

$$(6) \quad f(0) = 0, f'(k) > 0, f''(k) < 0, \lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$$

という稻田の条件を満たすと仮定される。上の最適化問題の制約条件の(2)は、資本蓄積に関する微分方程式であり、(3)は資本ストックの初期条件である。

このような動学的最適問題は通常、最適制御理論を用いて解かれる。この問題に関するハミルトニアンは、 $m$ を補助変数として、以下のように定義される。

$$(7) \quad H(k, c, m) = u(c) + m[f(k) - (\delta + n)k - c]$$

このハミルトニアンに関する最適化のための必要条件は、以下のようになる。なお変数の右下に添え字を付けて、偏導関数を示している。

$$(8) \quad H_c = u'(c) - m = 0$$

$$(9) \quad H_{cc} = u''(c) < 0$$

$$(10) \quad H_k = m[f'(k) - (\delta + n)] = \rho m - \dot{m}$$

$$(11) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (m e^{-\rho t} k) = 0$$

ここで条件の(8)と(9)は、ハミルトニアンが $c$ に関して最大化されることを意味している。(10)は補助変数の $m$ に関する微分方程式である。(11)は横断性の条件と呼ばれ、資本ストックの価値の成長率が割引率の $\rho$ より小さくなることを意味している。なお付け加えると、補助変数の $m$ は資本ストックの影の価格 (shadow price) を表しており、(1)式を資本ストックの関数として

$$(12) \quad V(k_0) = \text{Max}_c \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c) dt$$

と表すとき、次の式が成り立つことはよく知られている。

$$(13) \quad V'(k_0) = m(t_0)$$

さて(8)式の対数を取り、時間 $t$ で微分すると

$$(14) \quad \frac{\dot{m}}{m} = \frac{u'' \dot{c}}{u'} = \frac{u'' c \dot{c}}{u' c} = -\theta(c) \frac{\dot{c}}{c}$$

が得られる。ここで $\theta(c) \equiv -\frac{u'' c}{u'}$ は、限界効用の弾力性を表している。この

$\theta(c)$ は、一般的には $c$ に依存しているが、効用関数が

$$(15) \quad u(c) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}$$

という形をしているときは、 $c$  には依存しない定数になることが容易に分かる。(15)のタイプの効用関数は、相対的危険回避度が一定と呼ばれる。以下では説明を簡単にするために、このタイプの効用関数を仮定して議論を進める。そうすると、(10)と(14)より

$$(16) \quad \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} [f'(k) - (\delta + n + \rho)]$$

が導かれる。したがって最適化のための必要条件を整理すると、(2), (3), (11), (16)にまとめられる。ここで、(2)と(16)は  $k$  と  $c$  に関する連立微分方程式系であり、(3)と(11)がその境界条件になっている。この動学的システムの位相図は、よく知られているように、図1のように表せる。このシステムで、 $\dot{k}=0$ ,  $\dot{c}=0$  となる微分方程式の定常解は

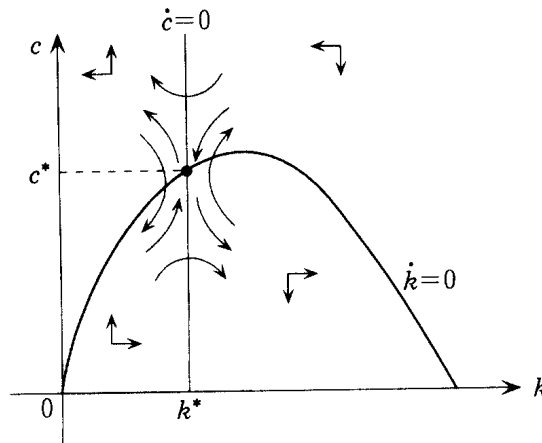


図1

$$(17) \quad c = f(k) - (\delta + n)k$$

$$(18) \quad f'(k) = \delta + n + \rho$$

を満たす  $k^*$ ,  $c^*$  である。この定常解は、仮定(6)の下で一意的に存在することが分かる。次に(2), (16)の微分方程式系を定常解の近傍で線形化して、整理すると

$$(19) \quad \begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(k^*) - (\delta + n) & -1 \\ \frac{c^*}{\theta} f''(k^*) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k - k^* \\ c - c^* \end{pmatrix}$$

を得る。この線形システムの特性方程式は

$$(20) \quad \lambda^2 - [f'(k^*) - \delta - n]\lambda + \frac{c^*}{\theta} f''(k^*) = 0$$

となる。根の公式より、特性根の $\lambda_1, \lambda_2$ は

$$(21) \quad \lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2} \left\{ [f'(k^*) - \delta - n] \pm \sqrt{[f'(k^*) - \delta - n]^2 - 4 \frac{c^*}{\theta} f''(k^*)} \right\}$$

で与えられる。ここで(6)の仮定  $f''(k) < 0$  により、特性根は相異なる実根になることが分かる。また  $k^*$  が(18)を満たすことから

$$(22) \quad f'(k^*) - \delta - n > 0$$

である。したがって特性根は

$$(23) \quad \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$$

となることより、定常解は鞍点である。

## 第 2 節

この節では、生産関数が逓増的かつ逓減的な部分をもつという点においてのみ第 1 節のモデルと異なる 1 部門最適成長モデルを考察する。すなわち生産関数は、一人当たり資本ストックが小さいときは上に凸で資本ストックが十分大きいときには上に凹となる、図 2 に見られるような形をしている場合の動学的なシステムを考える。この生産関数の  $f(k)$  は、以下の性質を満たすと仮定される。

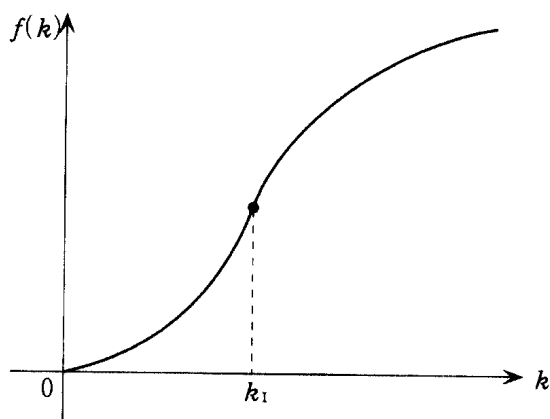


図 2

$$(24) \quad f(0)=0; f'(k)>0; f''(k)>0, (0 < k < k_1); f''(k_1)=0; \\ f''(k)<0, (k > k_1); \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k)=0.$$

なおここで、 $k_1$  は  $f(k)$  の変曲点である。

生産関数がこのような convex-concave な形である場合も、最適成長モデルにおける最適化のための必要条件は第1節のそれと同じである。すなわち、以下の(2), (3), (11), (16)に要約される。

$$(2) \quad \dot{k} = f(k) - (n + \delta)k - c$$

$$(3) \quad k(0) = k_0$$

$$(16) \quad \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} [f'(k) - (n + \delta + \rho)]$$

$$(11) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (me^{-\rho t} k) = 0$$

定常解を求める条件も(17), (18)の

$$(17) \quad c = f(k) - (n + \delta)k$$

$$(18) \quad f'(k) = n + \delta + \rho$$

と同じである。しかしながら生産関数が convex-concave な形であることから、(18)を満たす定常解の資本ストックは図3に見られるように通常  $k_1^*$  と  $k_2^*$  のふたつ存在する。より厳密には、パラメータの値と  $f'(k)$  の大小関係により以下の5つのケースが生じ得る。

[I]  $f'(0) < n + \delta + \rho < f'(k_1)$  のとき、(18)を満たす解  $k_1^*$ ,  $k_2^*$  が存在する。

[II]  $f'(0) > n + \delta + \rho$  のとき、(18)を満たす解は  $k_2^*$  のみ存在する。

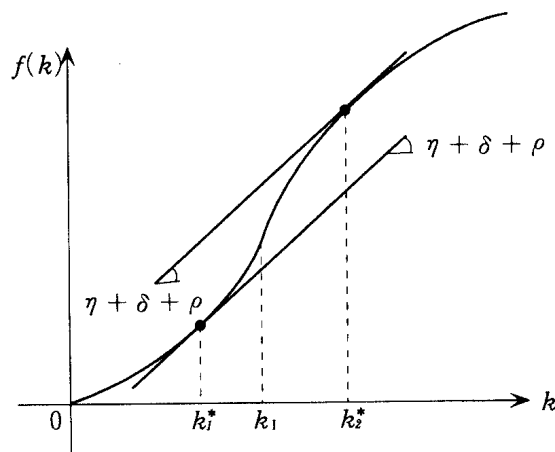


図3

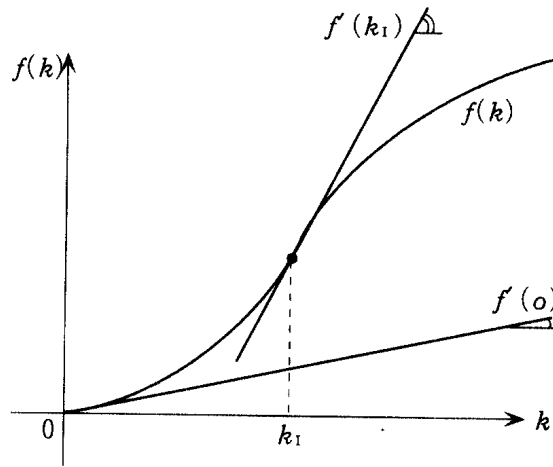


図 4

- [III]  $f'(k_1) < n + \delta + \rho$  のとき, (18)を満たす解は存在しない。
- [IV]  $f'(0) = n + \delta + \rho$  のとき, (18)を満たす解は 0 と  $k_2^*$  が存在する。
- [V]  $f'(k_1) = n + \delta + \rho$  のとき, (18)を満たす解は  $k_1$  のみ存在する。

なおここで,  $k_1^*$  と  $k_2^*$  はそれぞれ(18)と  $f''(k_1)^* > 0, f''(k_2)^* < 0$  を満たす正の値の資本ストックである。以上の分類の仕方は, (18)と(24)で示される生産関数の形と図 4 から明らかであろう。

次に(17)で示される  $\dot{k} = 0$  となる  $c$  と  $k$  の関係を調べよう。前節の concave な生産関数の場合と異なり, パラメーターの  $n + \delta$  と  $f(k)$  の大小関係により, 図 5 に示される 3 通りのケースが容易に分かるであろう。すなわち

- (イ)  $\frac{f(k_1)}{k_1} > (n + \delta)$  であり,  $c = f(k) - (n + \delta)k$  は  $c \geq 0$  において convex-

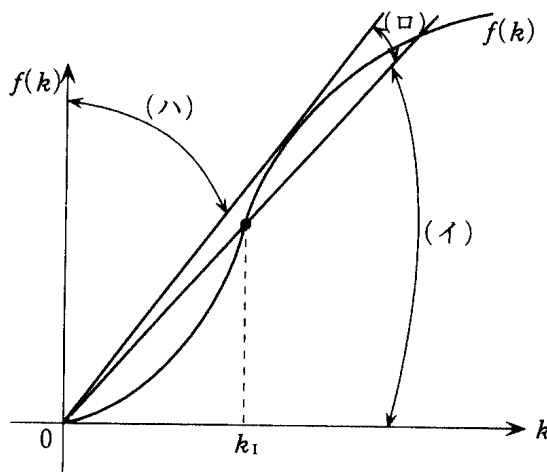


図 5

concave の形になる。

(ロ)  $\frac{f(k_1)}{k_1} \leq (n+\delta) < \text{Max} \left[ \frac{f(k)}{k} \right]$  であり,  $c=f(k)-(n+\delta)k$  は  $c \geq 0$  において凹関数になる。

(イ)  $(n+\delta) \geq \text{Max} \left[ \frac{f(k)}{k} \right]$  であり,  $c=f(k)-(n+\delta)k$  は  $c \geq 0$  において常に負になる。

以上のことが図5より読み取れる。このように, 生産関数が convex-concave の形をしているときには, パラメータの  $n, \delta, \rho$  と  $f(k)$  の大小関係により,  $\dot{k}=0, \dot{c}=0$  を表す(17), (18)の位置関係には様々の場合があることになる。

さて(17), (18)の位置関係の代表的な例として, 上の [I] と(イ)の組み合わせの場合を以下で考察しよう。すなわち

[I], (イ)  $f'(0) < n+\delta+\rho < f'(k_1)$  のとき, (18)を満たす解  $k_1^*, k_2^*$  が存在する。また  $c=f(k)-(n+\delta)k$  は  $c \geq 0$  において convex-concave の形になる。

の場合である。このケースは Skiba [1] による詳細な分析があり, 以下でもそれを参考にする。このケースの位相図は, 定性的に図6のように表せる。この図における定常解のAとBの近傍で, 微分方程式系の(2), (16)を線形近似したシステムは(19)と同じになり, その特性根は前節の(21)すなわち

$$(21) \quad \lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2} \left\{ [f'(k^*) - \delta - n] \pm \sqrt{[f'(k^*) - \delta - n]^2 - 4 \frac{c^*}{\theta} f''(k^*)} \right\}$$

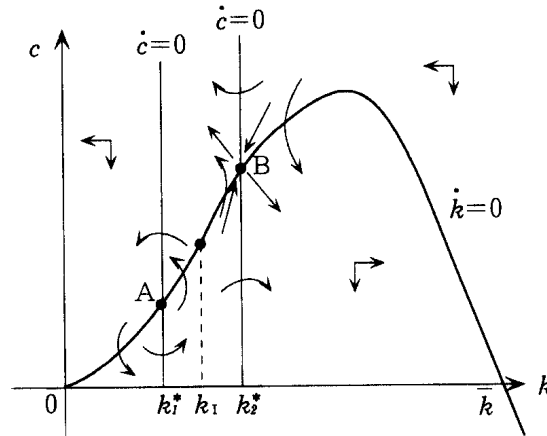


図6



で与えられている。この根号の中の判別式を  $D=[f'(k^*)-\delta-n]^2-4\frac{c^*}{\theta}f''(k^*)$  と置くと、判別式と  $f''(k^*)$  の符号により、特性根の符号は次のように分類されることが容易に分かる。

- ①  $f''(k^*) < 0$  のとき,  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$
- ②  $f''(k^*) > 0$  で  $D > 0$  のとき,  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$
- ③  $f''(k^*) > 0$  で  $D = 0$  のとき,  $\lambda > 0$  の重根
- ④  $f''(k^*) > 0$  で  $D < 0$  のとき, 複素根になり,  $\lambda = \alpha \pm i\beta, \alpha > 0, \beta > 0$
- ⑤  $f''(k^*) = 0$  のとき,  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$

なおここでも、前節の(22)の関係式が用いられている。

図6の点Bの定常解では、 $f''(k_2^*) < 0$  であるから①が成立する。すなわちこの定常解は、第1節の新古典派モデルと同様の鞍点になる。図6の定常解の点Aについては、 $f''(k_1^*) > 0$  であるから②、③、④の可能性が生じる。これらの場合において、特性根の実部が正となることから、点Aは局所的に不安定である。

次に(2)、(16)の必要条件に加えて、(11)の横断性条件を満たす軌道を検討してみよう。まず図7の定常解の点Bに収束する経路の  $h$  は、(11)を満たしている。というのは(8)より

$$(25) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (me^{-\rho t}k) = \lim_{t \rightarrow \infty} [u'(c)e^{-\rho t}k] = u'(c_2^*)k_2^* \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} = 0$$

が成立するからである。なおここで、 $c_2^*$  は点Bの縦座標である。次に、図7

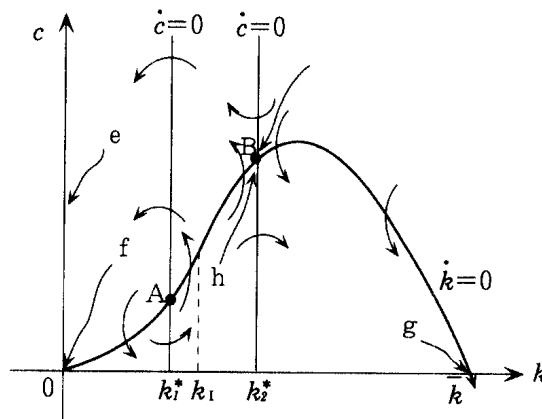


図7

の位相図に見られる軌道  $e, f, g$  が横断性条件を満たすかどうか調べてみる。まず  $e$  で示される経路は  $c > 0$  の値で  $k$  が 0 に収束する。このとき(2)より  $\dot{k} < 0$  となるが、資本ストックはマイナスの値はとらないから、この経路は候補から外れる。次に  $k = \bar{k}, c = 0$  に収束する軌道の  $g$  について考えよう。ここで補助変数の  $m$  に関する微分方程式の(10)を書き直すと

$$(26) \quad \frac{\dot{m}}{m} = \rho - [f'(k) - (n + \delta)]$$

を得る。軌道の  $g$  では、資本ストックが  $\bar{k}$  に収束することから、この式の右辺は  $\rho - [f'(\bar{k}) - (n + \delta)]$  となる。ところで  $\bar{k}$  においては、図4から分かるように  $f(k)$  を  $(n + \delta)k$  が下から横切っているので、 $f'(\bar{k}) < (n + \delta)$  である。したがって(26)の右辺は  $\rho$  より大きくなる。このことは、 $m$  の成長率が  $\rho$  より大きいことを意味するから

$$(27) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (me^{-\rho t} k) = \bar{k} \lim_{t \rightarrow \infty} (me^{-\rho t}) > 0$$

であって、(11)の条件を満たさない。ゆえに軌道  $g$  は最適な経路ではない。一方、軌道の  $f$  を考えると、この経路は  $k = 0, c = 0$  に収束する。ところで図4の(i)より、 $k = 0$  において  $f'(0) \geq (n + \delta)$  であることが分かる。このとき(26)の右辺は  $\rho$  より大きくなる。これは  $m$  の成長率が  $\rho$  より大きくなることを意味するから、

$$(28) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (me^{-\rho t} k) = 0$$

となり、横断性の条件を満たす。

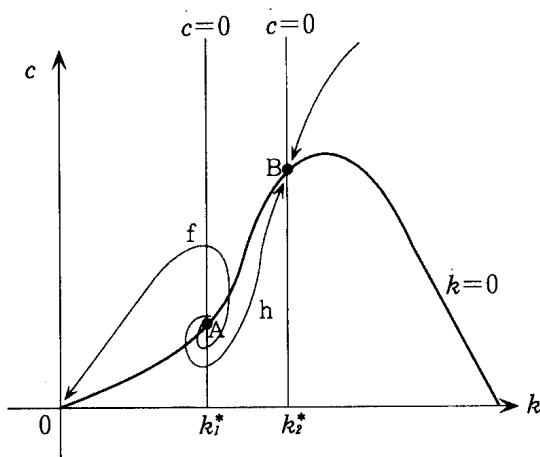


図 8

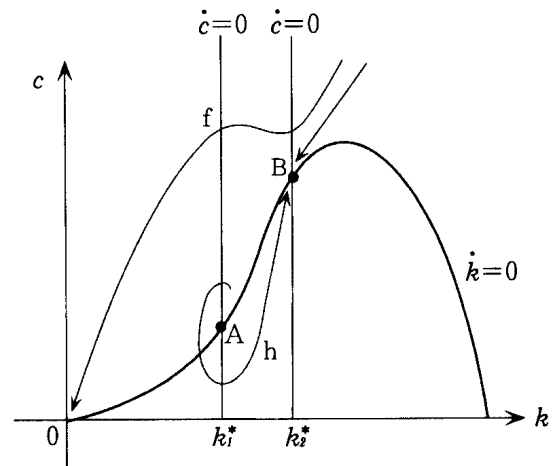


図 9

以上の分析から、最適性の必要条件を満たす経路は鞍点のBに収束する軌道  $h$  のと原点に近づく軌道の  $f$  の二通り存在することが分かる。したがって、[I]と(i)の組み合わせの場合に考えられる位相図の収束する経路は、図8か図9のようになる。このとき資本ストックの初期状態がどの位置にあるかで、対応する最適な経路と  $c$  の値は様々であるように見える。

ところで最適成長理論における成長経路の単調性に関しては以下の命題がある。

(命題1) 計画期間が無限大であり、状態変数と制御変数が共に一つである場合は、もし定常状態に近づく最適経路が存在するならばその状態変数の値は単調に推移する。<sup>1</sup>

さらに Skiba [1] の分析により、収束する経路における目的関数の大域的な大小関係については以下の命題がある。

(命題2) 定常状態に収束する経路が2つある場合は、消費水準が大きい経路がより大きな目的関数の値をもたらす。<sup>2</sup>

上の2つの命題により、最適問題の解である収束経路の位相図は、図10と図11の2つの場合があることが分かる。図10において、 $\hat{k}$ は収束する資本蓄積の経路が、新古典派的な鞍点になるか0に減少していくかの臨界点になっている。

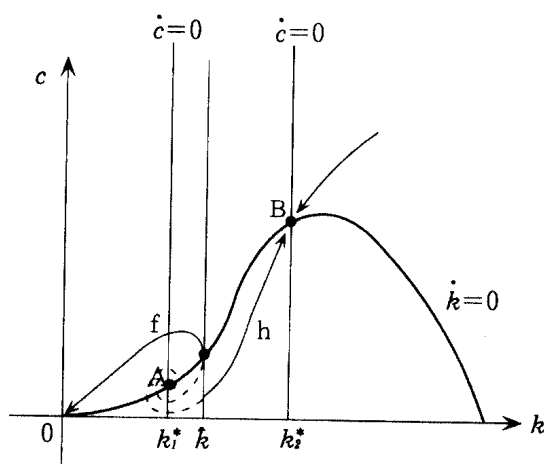


図10

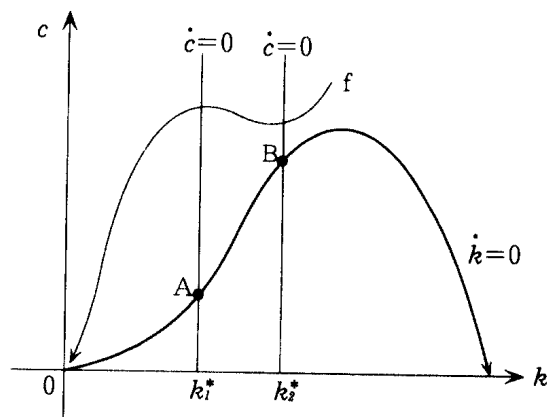


図11

1. この命題の証明は、たとえば Kamien, Schwartz [4] の179p.に述べられている。

2. この命題の証明は、Skiba [1] の536p.,537p.に述べられている。

### 第3節

この節では、前の節で詳細に検討したケースの (I) と (i) 以外の場合における最適化問題の位相図について考察する。

まず (II) と (i) の組み合わせでは、 $\rho < f'(0) - (n + \delta)$  であるから、 $\dot{c} = 0$  となる (18) を満たす定常解の  $k^*$  は、図12より分かるように  $f''(k) < 0$  の範囲に1つだけ存在する。したがってこの場合の解軌道の位相図は、新古典派のそれと定性的に同様な図13のようになる。

次に (III) と (i) の組み合わせにおいては、 $\rho > f'(k_1) - (n + \delta)$  であるから、 $\dot{c} = 0$  となる (18) を満たす定常解の  $k^*$  は、図12より分かるように存在しない。この場合は、資本ストックの水準に関わらず  $\rho > f'(k) - (n + \delta)$  が成立するから、(16) より  $c$  は 0 の場合を除いて単調に減少し続ける。前の節と同様の考察から、資本蓄積の最適経路は原点に単調に収束することが分かる。したがってこの場合の解軌道の位相図は、図14のようになる。

次に (IV) と (i) の組み合わせにおいては、 $\rho = f'(0) - (n + \delta)$  であるから、 $\dot{c} = 0$  となる (18) を満たす定常解は 0 と  $k_2^*$  の二つ存在する。したがってこの場合の解軌道の位相図は、図15のようになる。この場合は、図から読み取れるように、縦軸の  $k = 0$  の位置が  $\dot{c} = 0$  となることを除いて、(II) と (i) の場合と同様の位相図になる。このときに、 $k = 0, c > 0$  に収束する経路が最適な解にならないことも第2節と同様である。

最後に、(V) と (i) の組み合わせにおいては、 $\rho = f'(k_1) - (n + \delta)$  であるから、 $\dot{c} = 0$  となる (18) を満たす定常解は  $k_1$  のみになる。したがってこの場合の解軌道の位相図は、図16のようになる。ここでの資本ストックの最適な経路は、原点に収束するものだけになることが図から読み取れる。

さてこれまでの議論を整理すると、パラメーターの  $\rho + n + \delta$  とそれに対応する資本ストックの定常解の  $k^*$  の間の関係を表す分岐図の図17を描くことができる。

まず  $\rho + n + \delta$  の値が  $f'(0)$  より小さいときは、(II) のケースであるから、図13の位相図により正の定常解の  $k^*$  に収束する経路が存在する。ここにおいて、 $f'(k^*) = (n + \delta + \rho)$  と  $f''(k^*) < 0$  が成立するので、パラメーターの  $\rho$

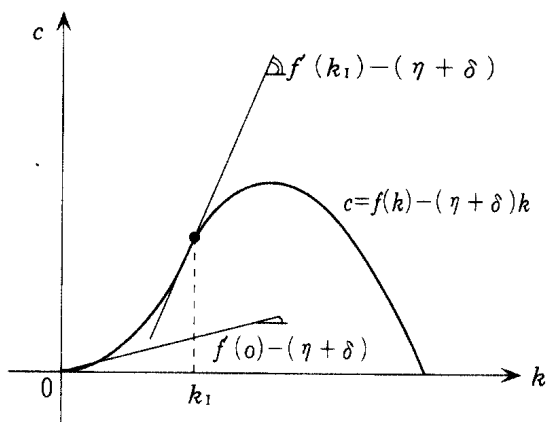


図12

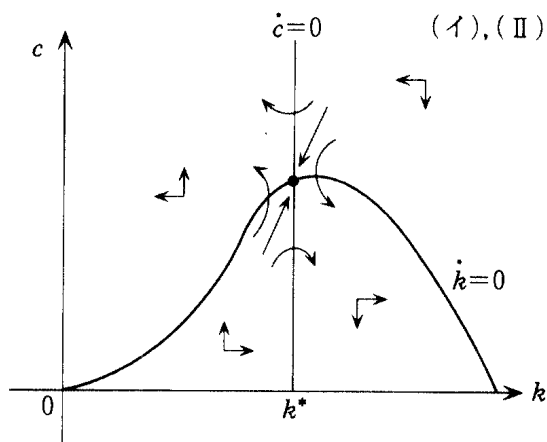


図13

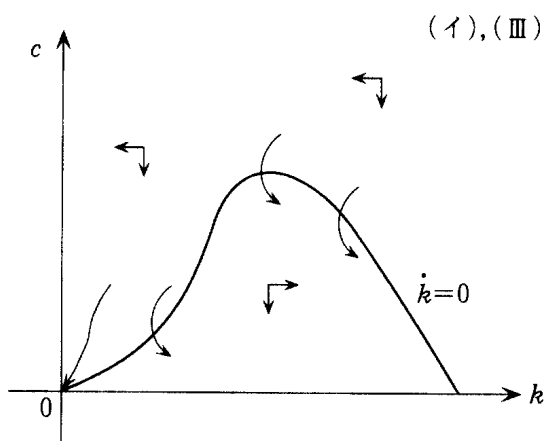


図14

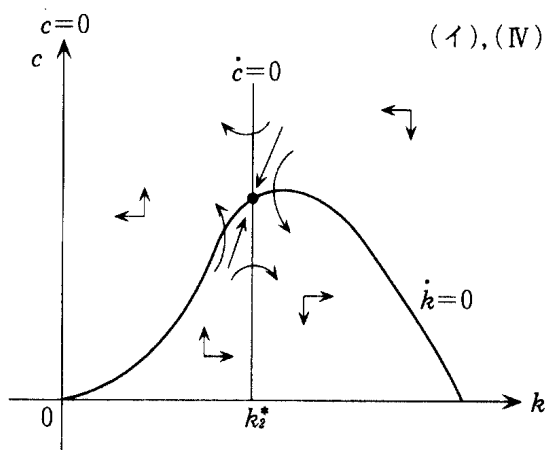


図15

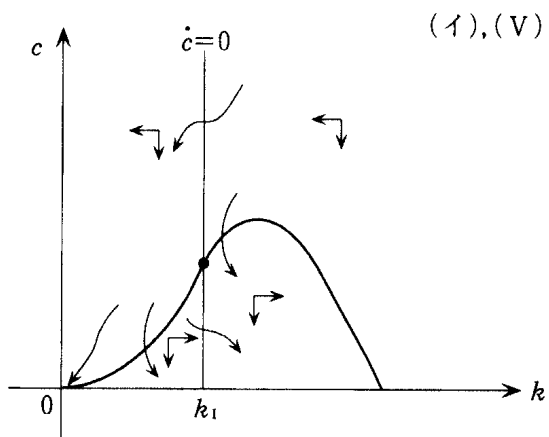


図16

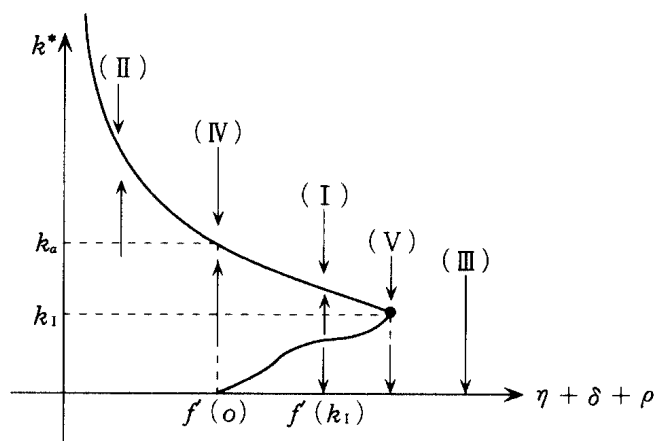


図17

$+n+\delta$ が増加するにつれてそれに対応する資本ストックの定常解の  $k^*$  は減少することが分かる。

次に  $\rho+n+\delta$  の値が上昇して  $f'(0)$  と等しくなると、これは (IV) のケースになることから、 $f'(k^*)=(n+\delta+\rho)$  を満たす資本ストックは 0 と  $k_a$  の二つ存在する。なおここで  $k_a$  は、 $f'(k_a)=(n+\delta+\rho)=f'(0)$  を満たす資本ストックの値である。このとき図15の位相図により、 $k=0$  に収束する最適な経路は存在しないが、正の定常解の  $k_a$  に収束する経路が存在することが分かる。

次に  $\rho+n+\delta$  の値がより上昇して  $f'(0)<n+\delta+\rho<f(k_1)$  となると、これは (I) のケースであるから、 $f'(k^*)=(n+\delta+\rho)$  を満たす資本ストックは  $k_1^*$  と  $k_2^*$  の二つ存在する。この場合の位相図は図10ないし図11であるから、 $k=0$  の原点と新古典派的な鞍点の  $k_2^*(>k_1^*)$  に収束する最適な経路が存在する。

次に  $\rho+n+\delta$  の値がさらに上昇して  $n+\delta+\rho=f(k_1)$  となると、これは (V) のケースであるから、 $f'(k^*)=(n+\delta+\rho)$  を満たす資本ストックの定常解は  $k_1$  のみになる。この場合の位相図は図16であるから、 $k_1$  に収束する最適な経路は存在しないが  $k=0$  の原点に収束する最適経路がある。

最後に  $\rho+n+\delta$  の値がさらに上昇して  $n+\delta+\rho>f(k_1)$  となると、これは (III) のケースであるから、 $f'(k^*)=(n+\delta+\rho)$  を満たす資本ストックの定常解は存在しない。ただし図14の位相図に見られるように、 $k=0$  の原点に収束する最適経路はある。

以上の議論から、パラメーターの  $\rho+n+\delta$  とそれに対応する資本ストックの定常解の  $k^*$  の間の関係を表す分岐図は図17のようになるのである。

これまでの議論では、 $\dot{k}=0, \dot{c}=0$  を表す軌跡の位置関係として上述の (I) と (II), (III), (IV), (V) の組み合わせの場合について考察してきた。次に (ロ) に  $\dot{k}=0, \dot{c}=0$  おけるを表す軌跡の位置関係の組み合わせを簡単に調べてみよう。この場合は、図18から容易に分かるように、以下の三つのケースが生じる。

- (a)  $f'(k_1)-(n+\delta)<\rho$  ならば、常に  $\dot{c}<0$  が成立する。
- (b)  $f'(k_1)-(n+\delta)=\rho$  ならば、 $k_1$  において  $\dot{c}=0$  が成立する。
- (c)  $f'(k_1)-(n+\delta)>\rho$  ならば、ある  $k^*(>k_1)$  が存在して  $\dot{c}=0$  が成立する。

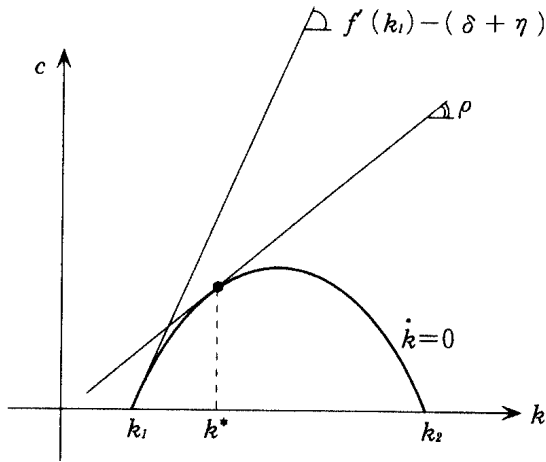


図18

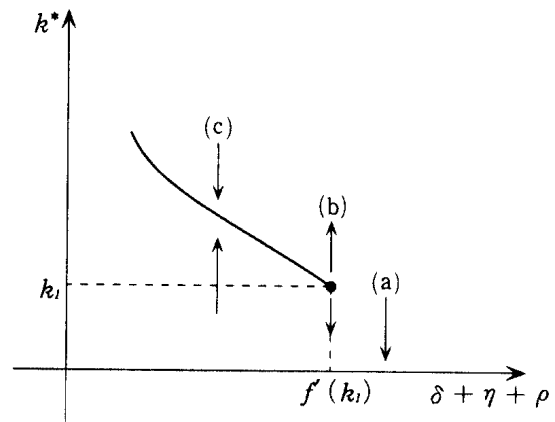


図19

なお $k_1, k_2$ は、 $f(k) - (n + \delta)k = 0$ を満たす資本ストックの大きさ ( $k_1 < k_2$ ) である。ここで、これらのケースのそれぞれにおける位相図は省略して、分岐図の結論だけを図示すると図19のようになる。この分岐図の導出は前述の議論と同様である。

### 終わりに

本稿は、連続モデルを用いて、利子率や割引率等のパラメータと資本ストックの定常解への収束関係を示す分岐図を構成した。この分岐図により、最適成長経路と様々なパラメータの間の対応関係が明白になるのである。たとえば分岐図の図18や図19から、労働人口の成長率 ( $n$ ) や資本の減耗率 ( $\delta$ ) や将来の効用に関する割引率 ( $\rho$ ) が大きくなりすぎると、最適な成長経路は資本ストックが枯渇するものになることが読み取れる。本稿の分析の意義は、連続モデルを用いて、Skiba [1] の議論を complete characterization of optimal growth path に拡張したことである。

### 参考文献

- [1] Skiba, A.K., 1979, Optimal growth with a convex-concave production function, *Econometrica*, vol 46, no.3, 527-539.
- [2] Dechert, D.W. and K. Nishimura, 1983, A complete characterization of optimal

growth paths in an aggregated model with a non-concave production function, *Journal of Economic Theory*, 27, 332-354.

- [ 3 ] Benhabib J., Majumdar M. and K. Nishimura, 1987, Global equilibrium dynamics with stationary recursive preferences, *Journal of Economic Behavior and Organization*, 8, 429-452.
- [ 4 ] Morton I. Kamien and Nancy L. Schwartz, 1991, *Dynamic optimization*-second edition, North-Holland.