〈論　説〉

エコノミクス
第2巻第2号
1997年11月

最適成長理論における OPTIMAL CHAOS に関する簡単な展望

筒井　修二

1．1　序論

この論文のタイトルの Optimal chaos という言葉は、経済主体が最適化行動をとった場合にそこから導かれる経済の諸変数が複雑極まりない変化をするという状態を表している。より具体的には，最適成長理論において，無限の将来にわたる効用和を最大化するという条件から最適政策関数（optimal policy function）が導き出される。この最適政策関数の $h(\cdot)$ は，現在の資本ストックの k_t に対して来期の資本ストックの k_{t+1} を指定すると言う形 $k_{t+1}=h(k_t)$ になっており，与えられた初期条件の k_0 に対応して様々の資本ストックの動的経路が生み出される。この動的経路が定常状態や周期解に収束する場合には単純な動学になり，動的経路の行方が定まらず不規則極まりないものになるとき複雑な動学，カオスが生じると言われる。最適成長理論の枠組みの中で，合理的に行動する経済主体の最適化行動が資本ストックの動的経路に関してカオスをもたらすかどうか，という問題に最初に肯定的な回答を与えたのは Boldlin and Montorucchio［2］であった。彼らの分析においては，将来の効用に関する割引率が極端に大きいとき，すなわち経済主体が非常に近視眼的であり，将来の効用よりも現在の効用を大幅に重視するという意味で忍耐強くない経済主体の場合に，カオスが生じることが示されてい

る。このことは，1970年代から80年の中期にかけて結実した Turnpike 定理の結論に合致するものであった。Turnpike 定理では，将来の効用に関する割引率が現在のそれに近い場合には，資本ストックの最適な経路が単調に定常状態に収束していくことが知られている。またこのことは，資本ストックの複雑な動的経路を生み出す最適成長モデルに対して，その将来の効用に関する割引率には上限があることを主張する最近の Minimum Impatience 定理 [6] にも整合的である。ところで最近の議論では，将来に関する割引率が現在のそれに非常に近い場合，すなわち 1 に任意に近いときにも Optimal chaos が生じることが示されている。Optimal chaos に関する1980年代の議論の展望は Boldlin and Woodford [7] など少なからずあるので，この論文では1990年代の議論の簡単な展望を試みる。

2．1　最適成長理論の枠組み

この節では以下で展開される議論の準備として，離散的な最適成長理論の枠組みを簡単に整理しておこう。まず最適成長モデルは通常以下のように定式化される。

(1) $$\underset{\{k_t\}}{Max}\sum_{0}^{\infty}\rho^t\nu(k_t, k_{t+1})$$

$$s.t.(k_t, k_{t+1})\in D, (t=0, 1, 2\cdots), k_0=\bar{k}, 0<\rho<1$$

ここで，変数の k_t は t 時点における経済の資本ストックの大きさを表し，ρ は時間に関する割引率である。D は実効可能な資本ストックの存在領域を示しており，$\bar{k}$ は初期の与えられた資本ストックの大きさである。また関数の $\nu(\cdot)$ は縮約された（reduced　form）効用関数と呼ばれている。Dynamic Programming の議論によれば，(1)の形の問題は $W(\cdot)$ を未知の関数とする次の形

(2) $$W(x)=\underset{y}{Max}[\nu(x, y)+\rho W(y)], (x, y)\in D$$

の関数方程式の問題と同等になることが知られている。ここで，$\nu(\cdot)$ が微分可能な凹関数であることや D のコンパクト性などの適当な仮定の下で，(2)を満たす $W(\cdot)$ が一意的に存在して微分可能な凹関数になることが分かってい

る。この $W(\cdot)$ は通常，評価（value）関数と呼ばれている。また(2)の右辺を最大化する y を $h(x)$ で表すと，明らかに

(3)　$W(x)=\nu(x, h(x))+\rho W(h(x))$

が成立する。この $h(x)$ は通常，政策（policy）関数と呼ばれ，上と同様の仮定の下で連続な関数になる。関数の $h(\cdot)$ が得られると，$k_{t+1}=h(k_t)$として求められる資本蓄積経路の $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ が(1)の一意的な最適解になるのである。このような最適成長理論における Dynamic Programming の援用すなわち(2)の利用は，x を今期の資本ストック，y を来期の資本ストックと解釈することにより，無限の期間における $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ の選択の問題を 2 期間にわたる選択の問題に帰着させるという意義を持っている。

ここで，(1)ないし(2)のように定式化された問題の最適な解が満たすべき条件を整理しておくと，最適解が定義域であるD の内点解であるとすると，(2)と(3)より一階の条件と包絡線（envelope）条件が以下のように得られることが容易に分かる。

(4)　$0=\nu_2(x, h(x))+\rho W'(h(x))$

(5)　$W'(x)=\nu_1(x, h(x))$

なお関数の下付きの添え字は，その関数の対応する順番の変数に関する偏微分を表している。また $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ は(1)の最適解であることから，以下の Euler 条件と横断性（transversality）条件を満たすことも分かる。

(6)　$0=\nu_2(k_t, k_{t+1})+\rho\nu_1(k_{t+1}, k_{t+2}), (t=0, 1, 2,\cdots)$

(7)　$0=\lim_{t\to\infty}\rho^t\nu_1(k_t, k_{t+1})k_t$

これまでの議論を簡単に要約すると，離散的な最適成長理論は(4)～(7)の条件を用いることにより，(1)の解である最適な資本ストック経路の $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ を特徴づけようとするものであると言える。

2．2　1部門最適成長モデル

前の節で述べられた最適成長経路の特徴付けの例として，(4)式を考察してみよう。いま関数の $\nu(\cdot)$，$W(\cdot)$ そして $h(\cdot)$ が十分な回数だけ微分可能な場合には，(4)を x に関して微分することにより

(8) $h'=\dfrac{\nu_{21}}{-(\nu_{22}+\rho W'')}$

が容易に得られる。先に述べたように $\nu(\cdot)$, $W(\cdot)$ が凹関数になることから，(8)の右辺の符号は縮約された効用関数の交差微分の ν_{21} の符号に依存する。すなわち

(9) $\mathrm{sgn}[h']=\mathrm{sgn}[\nu_{21}]$

が成立する。

次に1部門最適成長モデルの下で，この問題をより具体的に考察しよう。この場合の縮約された効用関数は，通常

(10) $\nu(x, y)\equiv u[f(x)-y], (f(x)\geq y)$

のように定式化される。ここで，x, y はそれぞれ今期と来期の資本ストックを表しており，$u[\cdot]$ は通常の効用関数である。また $f(x)$ は生産関数であり，$f(x)-y$ は今期の消費の大きさを示す。新古典派的な効用関数と生産関数は通常 $u'>0, u''<0, f'>0, f''<0$ を満たしていることから，$\nu(\cdot)$ の Hesse 行列の符号と行列式は

(11) $\begin{bmatrix}\nu_{11} & \nu_{12}\\ \nu_{21} & \nu_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u''(f')^2+u'f'' & -u''f'\\ -u''f' & u''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}- & +\\ + & -\end{bmatrix}$

(12) $\begin{vmatrix}\nu_{11} & \nu_{12}\\ \nu_{21} & \nu_{22}\end{vmatrix}=u''u'f''>0$

となることが(10)より容易に分かる。したがって $\nu(\cdot)$ は凹関数になり，また(8)より，$n(\cdot)$ は単調な増加関数になる。このとき評価関数の $W(\cdot)$ が凹であることから，政策関数のグラフは図1のようになることが分かる。この図において，k^* は(1)の最適な定常解を表し，(4)と(5)から得られる $1=\rho f'(k)$ を満たしている。この図から容易に分かるように，任意の初期値から出発する $k_{t+1}=h(k_t)$ を満たす最適成長経路の $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ は定常解の k^* に大域的に収束する。なおこの定常解に関する安定性は，割引率の ρ の大きさには依存しないことに注意しよう。

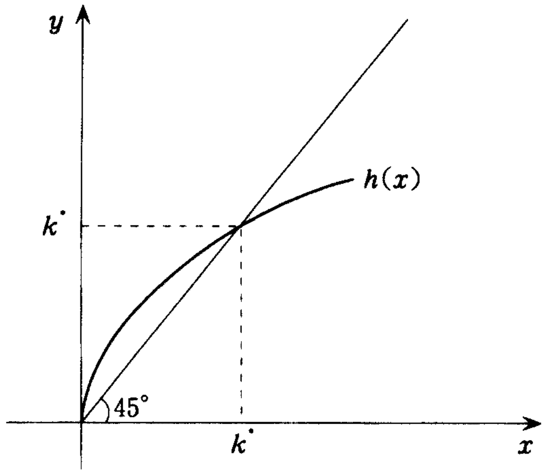

図1

2．3　2部門最適成長モデル

次に2部門の最適成長モデルに進むとき，政策関数の形がどのようになるのかを以下で考察してみよう。2部門モデルにおける消費財部門と投資財部門の生産関数をそれぞれ $c=f^c(k_c, l_c)$, $y=f^I(k_I, l_I)$ としよう。ここで k_c, l_c と k_I, l_I は，それぞれ消費財部門と投資財部門に配分された資本ストックと労働雇用量を表している。経済における所与の資本ストックの k と1に規格化された一定の労働人口の下で，生産要素市場の均衡条件は $k=k_c+k_I$, $1=l_c+l_I$ である。このとき，所与の k の下におけると y と c の関係を導き出すことができて，それを $c=T(y; k)$ と表そう。この関係は生産可能性曲線と呼ば

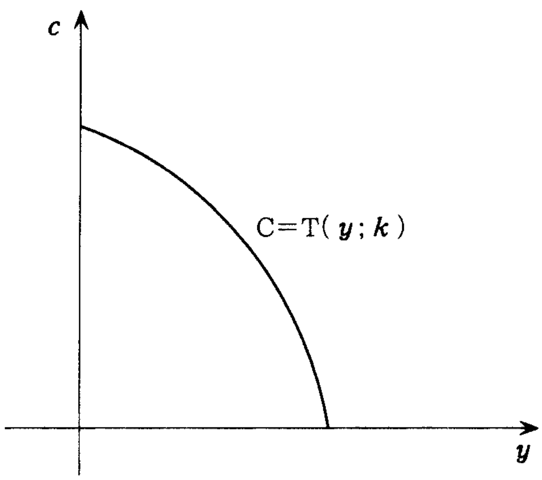

図2

れるものであり，２部門の生産関数に関する通常の仮定の下で，図２に示されているように右上方に凸の形になることが知られている。すなわち，$T(\cdot)$ が微分可能な場合には $T_1<0,\ T_2>0,\ T_{11}<0$ となるのである。いま議論を簡単化するために，効用関数を $u(c)=c$ と線形化すると縮約された効用関数は $u(c)=c=T(y,k)\equiv v(k,y)$ となる。

この縮約された効用関数を Dynamic programming の(2)式の定式化に当てはめれば

(13) $$W(k)=\underset{y}{Max}[c+\rho W(y)],\ s.t. c=T(y,k)$$
$$=\underset{y}{Max}[T(y,k)+\rho W(y)]$$

となる。(13)の２行目の右辺を y に関して最大化する条件は，明らかに

(14) $$T_1+\rho W'=0,\ T_{11}+\rho W''<0$$

である。この2番目の不等号は先に述べたことから満たされる。(13)で表される問題を図で考えてみよう。まず目的関数の $c+\rho W(y)$ の無差別曲線は，$dc/dy=-\rho W'(y)$ となることから図３のようになる。すなわちここでは c が中立財になっており，無差別曲線の傾きは消費財の水準には依存しないことは明らかである。先に述べたような仮定の下では，無差別曲線と生産可能性曲線との接点は一意に定まり，その y 座標は図４で示されているように $h(k)$ と表される。このことは，無差別曲線と生産可能性曲線の傾きがそれぞれ $-\rho W'(y)$, $T_1(y,k)$ となることと(14)の１番目の式から容易に分かる。このよ

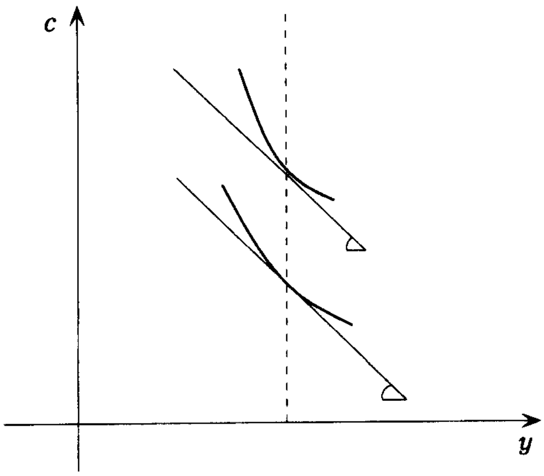

図３

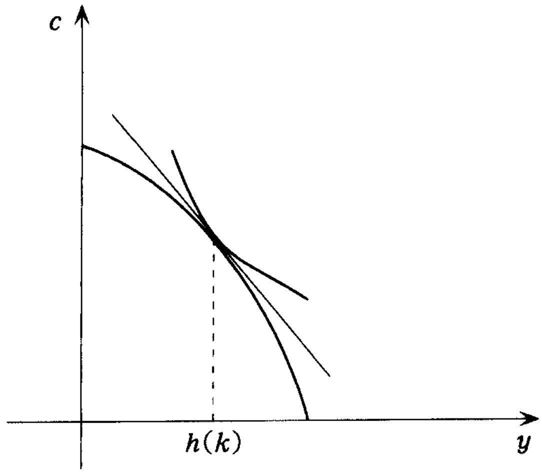

図４

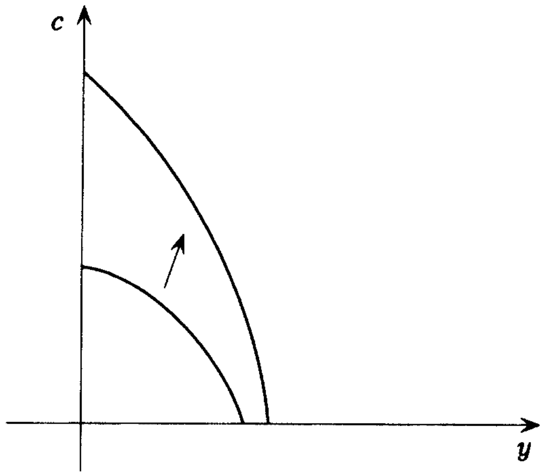

図5

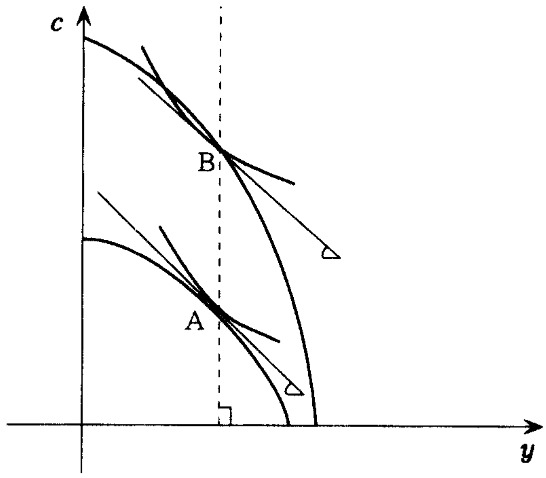

図6

うにして導き出される $h(k)$ を(14)の1番目の式に代入すると

(15)　$T_1(h(k); k)+\rho W'(h(k))=0$

が得られる。この式を k に関して微分して整理すると

(16)　$h'=\dfrac{T_{12}}{-(T_{11}+\rho W'')}$

となる。この式が先に述べた(8)式に対応していることは明らかであろう。

さて(16)の T_{12} の符号を図を用いて調べてみよう。以下では消費財部門が投資財部門に比較して資本集約的である場合を考察する。このとき経済の資本ストックの増加は，生産性可能性曲線に関して，投資財と比較して消費財の生産をより増加させるように働く効果があることが知られている。これはリプチンスキー効果と呼ばれるもので，k の増加により生産可能性曲線は図5に見られるようにシフトする。いま図6の点Aの状態が当初の均衡状態であり，資本ストックの増加により生産可能性曲線が外側に拡大したとき，点Bの状態では無差別曲線の傾きの絶対値が生産可能性曲線のそれよりも小さくなっていることに注意しよう。これは c が中立財であることとリプチンスキー効果に因るものである。したがって，シフトした生産可能性曲線と接する無差別曲線は，図7に見られるように点Bの左側たとえば点Eの位置になることが分かる。すなわち $k>h(k)$ となるから，$h(k)$ は減少関数になることが分かるであろう。

これまでの議論を要約すると，消費財部門が投資財部門に比較して資本集

約的であり，消費財が中立財である場合には，2部門モデルにおける政策関数の $h(k)$ のグラフは図8のようになる。図8において，最適定常解の k^* が局所的に不安定であれば，$k_{t+1}=h(k_t)$ を満たす最適成長経路の $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ が振動する複雑な経路をたどる可能性が生じる。たとえば $y=h^2(k)(=h(h(k)))$ を満たす k^* 以外の安定な不動点が存在するときには，2サイクルの安定した経済変動が生み出されることになる。

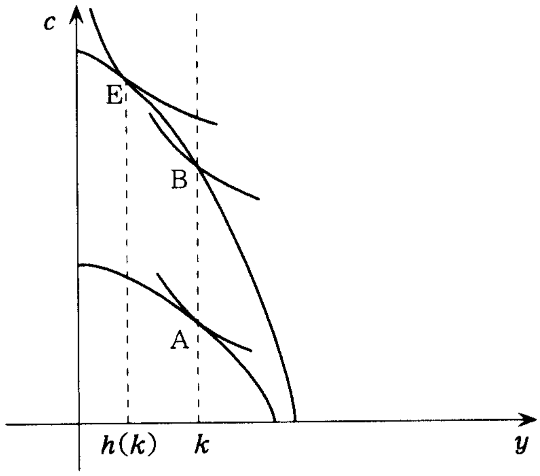

図 7

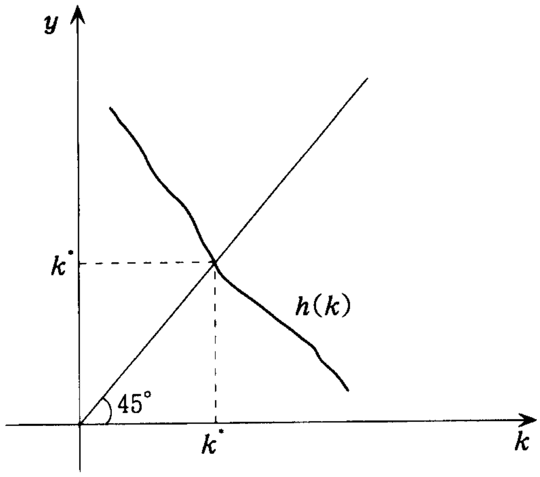

図 8

2．4　Inverse Problem

これまでの議論では，効用関数や時間に関する割引率そして生産関数などの経済のモデルがデーターとして与えられたとき，その経済モデルから導き出される政策関数の性質を調べることにより，最適成長経路の特徴を見ることを考察してきた。このような分析方法とは逆に，与えられた政策関数の $h(k)$ があるとき，この政策関数を最適成長モデルの解として導き出すような経済モデルは存在するのかという問題設定がある。これは，$h(k)$ がロジスチック（logistic）写像やテント（tent）写像のようなカオスを生み出すものである場合に，そのような政策関数を最適成長モデルの解とする経済モデルを構成することにより，カオス的な最適成長経路が存在することを説明しようとするものである。このような問題設定は Inverse Problem と呼ばれ，Boldlin and Montorucchio [2] の議論がよく知られている。彼らは，任意の2階

連続な関数の $h(k)$ に対してそれを政策関数とするような経済モデルを構成することができること，より正確には，最適成長モデルにおける縮約された効用関数の $v(\cdot)$ を導き出すことができることを示した。

ここで彼らの証明の手順を簡単に述べると，任意の $h(k)$ に対して

(17) $$W(x, y) \equiv -\frac{1}{2}y^2 + (y-\bar{y})h(x) - \frac{1}{2}Lx^2, (x, y) \in D$$

という形で関数 $W(\cdot)$ を定める。ここで $\bar{y}, L$ はパラメータである。この関数を y に関して最大化すると，明らかに $y=h(x)$ を得る。このようにして任意の政策関数に対して，それを解とするような目的関数を構成することができる。この関数 $W(\cdot)$ よりモデルの前提を満たす縮約された効用関数の $v(\cdot)$ を導き出すのである。彼らの分析は，任意の $h(\cdot)$ に対してそれに対応する $v(\cdot)$ を具体的に構成する方法を示しているという意味で constructive approach と言われる。

3．1　単峰形の政策関数

前の節で述べたように，ロジスチック写像 ($y=4x(1-x),(0 \leq x \leq 1)$) やテント写像 ($y=2x, (0 \leq x \leq (1/2)); y=2-2x, ((1/2) < x \leq 1)$) で定義された政策関数がカオスを生み出すことは，広く知られている。カオスの定義としては位相的カオスやエルゴード・カオスなど様々の定義があるが，最も分かりやすい定義である Lie-York の意味での位相的カオスの定義を用いて最適成長経路の複雑性を説明している Nishimura and Yano [4] の議論をこの節ではとり上げよう。まず Lie-Yorke の意味でのカオスとは，dynamic system (力学系) と呼ばれる定差方程式の $k_{t+1}=h(k_t)$ から生み出される経路の $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ の長期的な動向に関して，以下のような状態が成立する場合をいうものである。

(18) 関数 (h: $X \to X$) はすべての周期を持っている。

(19) 定義域の X の内に scramble set と呼ばれる非可算の集合 S が存在して，S から出発する軌道はいかなる周期軌道にも漸近しない。また S の任意の異なる2点から出発する軌道は漸近しないが，途中ではいくらで

も近づきうる。

この Lie-Yorke の意味でのカオスが成立するために関数 (h: $X \to X$) に課せられる条件は，"Period 3 Implies Chaos"という言葉に表現されているように，非常に簡単なものである。すなわち

(20) $h(\cdot)$ は連続関数であって，$k_{t+3}(=h^3(k_t)) \leq k_t < k_{t+1}(=h(k_t)) < k_{t+2}(=h^2(k_t))$という不等式を満たす k_t がその定義域の X の内に存在する

というものである。この不等式さえ満たす k_t を見つけることができたら，政策関数から生み出される最適成長経路 $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ は非常に複雑なものとなるのである。このことは，割引率の ρ の値が 1 に十分近ければ最適成長経路は最適定常解に収束するという simple dynamics を意味する Turnpike 定理と比較して対照的と言えよう。

さて Nishimura and Yano [4] は，縮約された効用関数 $v(\cdot)$ の交差微分の v_{12} がその定義域で負であることと，実効可能な資本ストックの領域の D を制限することにより，モデルから導かれる政策関数が単峰形になることを示した。すなわち，図 9 に見られるようなテント写像と似た形の政策関数を導びき，(19)の条件を満たすような k_t が存在するための条件を考察したのである。彼らのモデルでは，政策関数が右下がりになる部分は実効可能な資本ストックの内点解に，右上がりになる部分は境界解に対応しているという特徴がある。

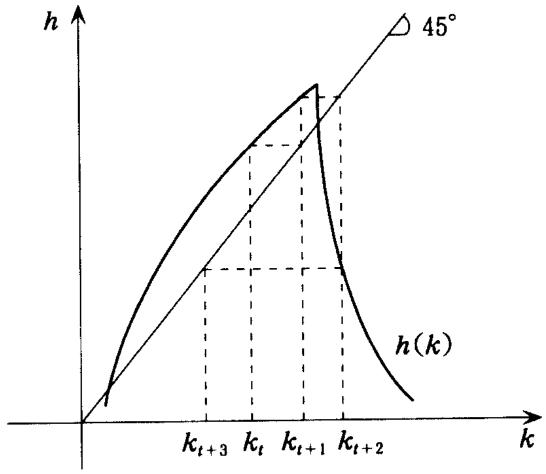

図 9

3．2　時間に関する割引率と政策関数の関係

この節では，最適成長理論における基本的な要素である時間に関する割引率の ρ と政策関数の対応関係について直感的に説明することを試みよう。まず ρ の値が十分1に近い場合は先に述べたように Turnpike 定理が成立して，政策関数 $h(\cdot)$ は最適定常解が大域的に安定になるような性質を持つ。これは ρ の値が1のとき，すなわち将来に得られる効用の大きさを割り引かない場合は，最適成長理論における解が最適定常解に大域的に収束することが知られている事から理解できよう。より具体的には，たとえばいま資本ストックの経路が x と y の値を周期的にとる場合と，資本ストックの経路が $(x+y)/2$ の値を定常的にとる場合を比較しよう。縮約された効用関数の $\nu(\cdot)$ が厳密な凹関数であれば

(21)　$$\nu(x, y)+\nu(y, x)<2\nu\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$$

が成立することから，資本ストックの経路が $(x+y)/2$ の値を定常的にとる場合の方が，資本ストックの経路が x と y の値を周期的にとる場合よりも目的関数の値が大きくなることが分かるであろう。このように考えると，振動する解よりも定常解の方が望ましいことが分かる。

次に ρ の値が十分0に近い場合は，政策関数 $h(\cdot)$ が恒等的に0となることが知られている。これはの値が0のとき，(1)の問題が

(22)　$$\underset{y}{Max}\cdot\nu(x, y), s.t.(x, y)\in D, x=\bar{k}$$

となり，来期以降の効用の値は考慮されないので，$\nu_2<0$ の仮定の下で来期の資本ストックの y は0になることから推察できよう。また ρ の値が0に近い場合に，最適成長モデルの解としてカオスが現れることも同様に理解できる。すなわち，遠い将来における効用の値がほとんどカウントされないような無限の期間における最適問題では，遠い将来の資本ストックの動向はいわばどうでもよい（Anything Goes）のであって，そのことがカオスを生み出すような資本ストックの蓄積経路をして最適な解にならしめうるのである。それでは，カオスを生み出すような最適成長モデルがあるとき，そのモデルにおける時間に関する割引率の ρ の上限はいかなる値になるかということが問

題になる。この問題は Minimum Impatience 定理といわれ，Mitra [8] の最近の研究によれば，その上限は $\rho<[(\sqrt{5}-1)/2]^2\approx 0.3819$ であることが知られている。Mitra [8] は，最適成長モデルが3周期解を持つ場合に双対価格変数の満たすべき条件からこの値を導出している。

4．1　観測されないカオスと観測されるカオス

前の3．1節で説明した Lie-York の意味での位相的カオスにおいては，scramble set と呼ばれる非可算の集合 S が存在するが，この集合の測度は必ずしも正にならないことが知られている。たとえば，以下のように定義される $[0,1]$ からそれ自身への関数の $h(\cdot)$を考えてみよう。

$$h(x)=x+\frac{1}{3},\ (0\leq x\leq\frac{2}{3}),$$

(23) $$h(x)=1-\frac{1-\delta}{\delta}(x-\frac{2}{3}),\ (\frac{2}{3}\leq x\leq\frac{2}{3}+\delta),$$

$$h(x)=x-\frac{2}{3},\ (\frac{2}{3}+\delta\leq x\leq 1).$$

なおパラメターの δ は $(0<\delta<1/8)$ を満たす。この例は，M.Nathanson の例といわれる。いま $A=[\delta,\frac{1}{3}]$, $B=[\frac{1}{3}+\delta,\frac{2}{3}]$, $C=[\frac{2}{3}+\delta,1]$ と定めると，$h(A)=B$, $h(B)=C$, $h(C)=A$ となることより $h^3(A)=A$ が分かる。すなわち区間 A, B, C の中の点はすべて3周期点になる。ここで $\delta\to 0$ にすると，区間 A, B, C の和集合は $[0,1]$ に収束する。3周期点の存在することから Lie-York の条件の(20)が満たされ，したがって(19)で述べられているような scramble set と呼ばれる非可算の集合 S が存在するが，$\delta\to 0$ のときにその測度は明らかに0になる。このとき，Lie-York の意味での位相的カオスは観測されないことになる。

さて観測されるカオスとして知られているエルゴード・カオスについて簡単に述べよう。エルゴード性とは，ある意味で空間の中を一様に動き回ることを保証する性質であると言われる。ここで，動的な経路の時間的な平均が空間的な平均に等しい，という有名なエルゴード定理は以下のように書かれ

る。すなわち

(24) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\chi_E(h^i(x))=\mu(E)$$

がほとんどすべての $x\in X$ について成立する。なお $\chi_E(\cdot)$ は

$$\chi_E(x)=1, (x\in E); \chi_E(x)=0, (x\notin E)$$

と定義される集合 E の特性関数である。また $\mu(E)$ は集合 E の測度をあらわす。この(24)式は，定義域の点 x から出発する経路の $\{k^i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ が可測集合 E を訪れる平均回数（左辺）は E の測度（右辺）に等しいことを述べている。この定理は，$h(\cdot)$ から生み出される動的経路が空間 X の可測集合をその大きさに比例して訪れることを意味しており，測度 $\mu(\cdot)$ が absolutely continuous であることから測度 $\mu(E)$ の大きさは正である。

エルゴード・カオスを生み出す一つの十分条件として以下のような命題が知られている。

(25) 関数の h: $X\to X$, $X=[\alpha,\beta]$ が次の条件を満たすとする。

[1] $\exists x^*\in(\alpha,\beta)$: $h'(x^*)=0$, $h''(x^*)<0$; $h'(x)>0$, $(x<x^*)$, $h'(x)<0$, $(x>x^*)$

[2] $h(x)>x$, $(\alpha<x<x^*)$, $h(x^*)\in(x^*,\beta]$; $Sh(x)<0$, $(\alpha\leq x<x^*, x^*<x\leq\beta)$

[3] $\exists k\geq 2$: $y=h^k(x^*)$, $h(y)=y$, $|h'(y)|>1$

このとき関数の h: $X\to X$, $X=[\alpha,\beta]$ はエルゴード・カオスを示す。

なおここで $Sh(\cdot)$ は Schwarzian 微分といわれ

$$Sh(x)=[h'''(x)/h'(x)]-(3/2)[h''(x)/h'(x)]^2$$

と定義されている。ここで $h(x)=4x(1-x)$, $X=[0,1]$ というロジスチック関数を考えると，この関数が上の [1], [2], [3] を満たすことは容易に確かめられる。なおロジスチック関数の場合，上の命題では $x^*=1/2$, $k=2$ に対応している。したがって，ロジスチック関数で表される政策関数はエルゴード・カオスを示すのである。

4．2 エルゴード・カオスの経済例

エルゴード・カオスを示す最適成長モデルの最近の研究として，Majumdar and Mitra [9] と Nishimura ,Sorger and Yano [10] を簡単に紹介しよ

う。Majumdar and Mitra［9］は，1部門最適成長モデルの枠組みの下で，効用関数が資本ストックの大きさにも依存するとした資産効果を持つ場合を考察した。彼らは，Boldlin and Montorucchio［2］の手法を用いて最適政策関数がロジスチック関数になるような数値例のモデルを構成して，資本ストックの動的な経路がLie-Yorkの意味での位相的カオスになり，かつエルゴード・カオスにもなることを示した。カオスを生み出す彼らの例では，時間に関する割引率は固定されている。一方，Nishimura, Sorger and Yano［10］は，最適成長モデルの標準的な仮定を満たすような数値モデルの集合を構成して，その数値モデルから導かれる政策関数がテント写像になることを示した。このテント写像はエルゴード・カオスの条件を満たすので，それから導かれる資本ストックの動的な経路がエルゴード・カオスになることが分かる。そうして彼らの結論は，時間に関する割引率が任意に1に近い場合も成立するのである。このことは，時間に関する割引率が任意に1に近い場合には単純な動学になるというTurnpike定理やMinimum Impatience定理の結論と矛盾しない。というのは，Turnpike定理では最適成長モデルを固定して定常解に収束するような割引率の存在を問題にしており，Minimum Impatience定理では最適政策関数を固定してそれを生み出すような割引率を考察しているからである。一方，Nishimura, Sorger and Yano［10］は，最適成長モデルの標準的なパラメターに関する数値モデルの集合を考えており，そのパラメターの大きさにより政策関数は変化するのである。彼らはまた，割引率が1に近づけば近づくほどそれに対応して変化する政策関数から導かれる資本ストックの動的な経路の複雑さが減少することも示している。

[参考文献]

[1] Benhabib,J.,Nishimura, K.: Competitive equilibrium cycles. J.Econ. Theory 35, 284-306 (1985)

[2] Boldlin,M.,Montorucchio L.: On the indeterminancy of capital accumulation path. J.Econ.Theory 40, 26-39 (1986)

[3] Nishimura,K.,Yano, M.: Non-linearity and business cycles in a two-sector equilibrium model.: Maruyama,Takahashi (ed), Nonlinear and Convex in Economic Theory (1992)

[4] Nishimura,K.,Yano, M.: Optimal chaos,nonlinearity and feasibility conditions. Econ. Theory 4, 689-704 (1994)

[5] Stokey, N.L.,R.E. Lucas JR and E.C.Prescott, :"Recursive Methods in Economic Dynamics", Harvard Univ. Press, Cambridge (1989)

[6] G.Sorger,:"Minimum Impatience for Recursive Economic Models", Springer-Verlag,Berlin (1992)

[7] Bordlin M.,Woodford, M.: Equilibrium models displaying endogenous fluctuations and chaos:a survey.Journal of Monetary Economics 25, 189-222 (1990)

[8] Mitra T.:An exact discount factor restriction for period-three cycles in dynamic optimization models. Journal of Economic Theory 69, 281-305 (1996)

[9] Majumdar,M.,Mitra,T.: Periodic and chaotic programs of optimal intertemporal allocation in aggregative model with wealth effect. Economic Theory 4, 649-676 (1994)

[10] Nishimura,K.,Sorger,G.,Yano,M.:Ergodic chaos in optimal growth models with low discount rates. Economic Theory 4, 705-719 (1994)