『経営学論集』，第16巻　第1号，1-23，2005
KYUSHU SANGYO UNIVERSITY, *KEIEIGAKU RONSHU*（*BUSINESS REVIEW*）Vol. 16, NO. 1, 1-23, 2005

〔論　説〕

ナッシュ均衡集合の基本構造とナッシュ写像の性質

髙　尾　健　朗

要　旨

本稿では，まず，有限非協力ゲームにおけるナッシュ均衡点についての基本的な事柄を整理し，ナッシュ均衡集合の基本構造を例を使って具体的に示した．さらに，ナッシュ自身によるナッシュ写像の性質について説明し，ナッシュ均衡点についての2通りの解釈について論じている．

目　次

1．はじめに

本稿は，有限非協力標準形ゲームにおけるナッシュ均衡集合（Nash equilibrium set）の基本的構造およびナッシュ写像（Nash mapping）の性質について論じたものである．ただし，扱っている内容はごく基礎的な事柄に限られており，高度な数学は使われていない．

ナッシュ均衡（Nash equilibrium）は，文字通り，ナッシュ（J.F.Nash）が考案した非協力ゲームの解概念であり，1951年にすべての有限非協力標準形ゲームにはナッシュ均衡が存在するこ

とが公表された（Nash 1951）．しかし，ゲームによっては非常に多くのナッシュ均衡をもつものも存在する．むしろ，多くのナッシュ均衡をもつゲームの方が普通である．そこで，本稿では，ナッシュ均衡の集合をナッシュ均衡集合と呼び，ナッシュ均衡集合の元（element）をナッシュ均衡点（Nash equilibrium point）と呼ぶことにする．ただし，両者を厳密に言い分ける必要のないときには，単にナッシュ均衡と呼ぶ．

ナッシュ均衡点とは，数学的には有限次元ユークリッド空間の非空，閉かつ凸な部分集合から同じ集合への写像の不動点（fixed point）[1]にすぎず，単なる数学的な理論とみなすこともできる．すべてのプレイヤーに（期待利得最大化という意味での）合理的行動を表わす写像——最適反応対応（best responce correspondence）と呼ばれるもの——を与え，すべてのプレイヤーの最適反応対応を組にした写像の不動点をナッシュ均衡点と呼ぶのである．

Kohlberg and Mertens（1986）は，ナッシュ均衡集合が有限個の連結成分（connected component）から構成されることを示した[2]．連結成分とは，位相幾何学の基本的な概念の一つである．ただし，紙数の関係上，ナッシュ均衡の位相幾何学的構造に関する定理[3]の証明とナッシュ均衡の安定性についての考察は別稿で行ない，ナッシュ均衡集合のごく基本的な構造のみを示す．

ナッシュ均衡という概念は極めて単純であり，その意味を理解するだけならめんどうな数学的議論はいっさい不要である．一度理解してしまえば当たり前と思われるようなものである．現代数学のレベルから見れば，数学的にも難しいものではない．しかし，実際のゲームでナッシュ均衡点を（すべて）見つけ出すのは容易なことではない．少し複雑なゲームになるとかなりの推論能力がなければ最適な行動を見つけ出すのは不可能である．ところが，ナッシュ写像を繰り返し適用することによって，純戦略から得られる情報の蓄積から最適な行動が導き出されるのである．ナッシュ写像そのものも実に単純なものである．ナッシュの最大の功績はこの単純なナッシュ写像を発見したことであると思われる．にもかかわらず，今日，ナッシュ写像そのものが顧みられることはほとんどない．

---

1) 写像 $f: X \rightarrow X$ の不動点とは，簡単に述べてしまえば，$x=f(x)$ となる $x \in X$ のことである．

2) Kohlberg and Mertens（1986）の PROPOSITION 1 の前半部分．後半部分の内容の簡単な紹介は脚注17で，連結成分についてのごく直観的な説明は脚注16で行なっている．

3) Kohlberg and Mertens（1986）の THEOREM 1．この定理の証明は別稿で行なうが，ここではこの定理の主張をおおまかに説明しておく．プレイヤーと各プレイヤーの純戦略の個数を固定し，利得関数が異なる有限標準形ゲームの集合を Γ，ゲーム $G \in \Gamma$ のナッシュ均衡集合を $\Delta^{NE}(G)$ とする．すると，Γ からナッシュ均衡集合への写像が定義でき，そのグラフを $E=\{(G,\sigma) \mid G \in \Gamma, \sigma \in \Delta^{NE}(G)\}$ と表わす．射影写像（projection）$p: E \rightarrow \Gamma$ とある同相写像（homeomorphism）$\varphi: \Gamma \rightarrow E$ の合成写像 $p \circ \varphi$ は恒等写像 $1_\Gamma: \Gamma \rightarrow \Gamma$ とホモトープ（homotopic）である．ただし，Γ と E には無限遠点∞が付け加えられ１点コンパクト化（one-point compactification）されており，$p(\infty)=\infty$ と定義されているものとする．

本稿の構成は，次の通りである．まず，第２章で，ナッシュ均衡点の厳密な定義とナッシュ均衡点の今日的な存在証明を与えた．第３章では，最適反応と純戦略最適反応の関係およびナッシュ均衡集合の基本的な構造を示した．第４章は，ナッシュ写像の不動点の存在証明とそれがナッシュ均衡点であることの証明およびナッシュ写像の繰り返し適用によってプレイヤーの最適反応が導かれることを例を使って示した．第５章は，本稿で述べた事柄からさらに発展すべき内容について要約した．

ただし，ナッシュ均衡点の存在証明は，すでに多くの論文や専門的なゲーム理論のテキストでなされているため，その２通りの存在証明は，ごく簡略なものにしている．その代わり，ナッシュ写像の不動点がナッシュ均衡点であることの証明は丁寧に行なっている．

次ページの表１．１の２人標準形ゲームは，本稿で例として使っているものである[4)]．本稿の内容を具体的に理解できるように，このゲームの概要を簡単に説明しておこう．

表１．１．２人標準形ゲームの例

	s_2^1	s_2^2
s_1^1	2,2	0,1
s_1^2	1,0	1,1
s_1^3	0,0	1,2

プレイヤー１の純戦略集合は$S_1=\{s_1^1,s_1^2,s_1^3\}$，プレイヤー２の純戦略集合は$S_2=\{s_2^1,s_2^2\}$である．下付き添字はプレイヤーを上付き添字は純戦略の番号を表わすものとする．この添字の付け方は，本稿全体で一貫している．両プレイヤーは事前の話し合いなしに各自の純戦略の中から１つを同時に選択し，その結果，表に書かれている６つのセルのうちの１つが達成される．各セル内に書かれている２つの数値のうち，左がプレイヤー１の利得（payoff）であり，右がプレイヤー２の利得である．もし，プレイヤー１がs_1^1を，プレイヤー２がs_2^2を選択した場合には，右上のセル――0,1と書かれているセル――が達成され，プレイヤー１は０の利得をプレイヤー２は１の利得を得てゲームが終了する．

このゲームにおける純戦略でのナッシュ均衡点が，(s_1^1,s_2^1)，(s_1^2,s_2^2)，(s_1^3,s_2^2)の３つであるこ

---

4) 表１．１のゲームは，経済モデルや何らかの現実的事象から得られたものではなく，特徴的なナッシュ均衡点が複数現れ，ナッシュ均衡集合を図解しやすいように恣意的に作ったものである．しかし，完全混合均衡点（completely mixed equilibrium point）は存在しない．ただし，完全混合均衡点をもつゲームを作るのは簡単である．右表のゲームは唯一の完全混合均衡点（(1/2, 1/2)，(1/2, 1/2)）をもっているもっとも簡単な例であろう．

表１．２

1,0	0,1
0,1	1,0

とは容易に分かる．次に，混合戦略でのナッシュ均衡点——ここでは，ナッシュ均衡集合——を与える．$\sigma_i(h)$を，プレイヤー$i\,(=1,2)$のh番目の純戦略s_i^h（$i=1$のときには，$h=1,2,3$，$i=2$のときには，$h=1,2$）に割り当てた確率であるとし，プレイヤー１の任意の混合戦略を$\sigma_1=(\sigma_1(1),\sigma_1(2),\sigma_1(3))$，プレイヤー２の任意の混合戦略を$\sigma_2=(\sigma_2(1),\sigma_2(2))$のように表わす．すると，このゲームを混合拡大した場合のナッシュ均衡集合は，

$$\{(\sigma_1,\sigma_2)\}=\left\{\{((1,0,0),(1,0))\},\left\{\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)\right\},\{((0,t,1-t),(0,1))\mid 0\le t\le 1\}\right\}$$

の３つの成分から構成されることになる[5]．

なお，本稿では，P:= Qと書かれている場合，PをQという式で定義することを意味する．また，集合XからYへの写像fが点対集合対応である場合には，$f:X\rightarrow\rightarrow Y$と表わす．

2．*n* 人非協力標準形ゲーム

2．1．標準形ゲームの定義

ゲームGのプレイヤーの集合を$I=\{1,2,\cdots,n\}$とし，プレイヤー$i\in I$の純戦略(pure strategy)の集合を$S_i=\{s_i^1,s_i^2,\cdots,s_i^{m_i}\}$と表わす．ただし，$m_i$は自然数でプレイヤー$i$のもつ純戦略の個数である．ゲーム$G$の純戦略空間（pure strategy space）は，直積$S=\times_{i=1}^n S_i$である．プレイヤーiの任意の純戦略をs_iと表わし，各プレイヤーのもつ純戦略の中から１つずつ純戦略を取りだして組にしたものを純戦略プロファイル（pure strategy profile）と呼び，任意の純戦略プロファイルを$s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)(\in S)$と表わす．プレイヤー$i$の純戦略利得関数（pure strategy payoff function）とは，$u_i:S\rightarrow\mathbf{R}$という関数である．ただし，$\mathbf{R}$は実数の集合である．各プレイヤー$i\in I$の純戦略利得関数$u_i(s)$を組にした

$$u(s)=(u_1(s),u_2(s),\cdots,u_n(s)) \tag{2.1.1}$$

を結合純戦略利得関数（combined pure strategy payoff function）と呼ぶことにする．もちろん，結合純戦略利得関数は，n次元離散空間Sからn次元実ベクトル空間への関数$u:S\rightarrow\mathbf{R}^n$で

---

[5] 第３章では，混合戦略を表す記号を換え，これら３つのナッシュ均衡成分を図解している．なお，ほとんどすべての有限非協力ゲームのナッシュ均衡点の個数は奇数である．これをウィルソンの奇数定理（Wilson's Oddness Theorem）という（Wilson 1971）．ただし，右表のゲームで$x=0$のときのナッシュ均衡点の個数は２個である．この例で$x=0$のときを，Wilson（1971）は，きわめて例外的（exceptional）であるとしている．なお，$x<0$のときには１個，$x>0$のときには３個のナッシュ均衡点をもつ．“ほとんどすべての（almost all）”とは，“ルベーグ測度０の点を除いて”といった意味である．

表１．３

1,1	0,0
0,0	x, x

ある．以上の表記を使って，n 人非協力標準形ゲーム G は

$$G=(I,S,u) \tag{2.1.2}$$

と定義される．各プレイヤーが混合戦略(mixed strategy)まで選択することを許すゲームをゲームの混合拡大（mixed extension）という．プレイヤー$i\in I$の混合戦略とは，プレイヤー$i\in I$の純戦略集合$S_i=\{s_i^1,s_i^2,\cdots,s_i^{m_i}\}$上の確率分布のことであり，プレイヤー$i\in I$の任意の混合戦略を$\sigma_i$で表わす．ただし，単に混合戦略と言った場合には純戦略も含んでいることに注意する．混合戦略σ_iによって純戦略$s_i^h\ (h=1,2,\cdots,m_i)$に割り当てられた確率を$\sigma_i(s_i^h)$もしくは$\sigma_i(h)$で表わすと，プレイヤー$i\in I$の混合戦略は

$$\sigma_i=\left(\sigma_i(s_i^1),\sigma_i(s_i^2),\cdots,\sigma_i(s_i^{m_i})\right) \tag{2.1.3}$$

または

$$\sigma_i=(\sigma_i(1),\sigma_i(2),\cdots,\sigma_i(m_i)) \tag{2.1.4}$$

と表わされる．簡単に$\sigma_i=(\sigma_i(s_i))_{s_i\in S_i}$と表わすこともある．もちろん，$0\le\sigma_i(s_i)\le 1\ (\forall s_i\in S_i)$，$\sum_{s_i\in S_i}\sigma_i(s_i)=1$である．純戦略$s_i^h\ (h=1,\cdots,m_i)$は，混合戦略として，

$$s_i^h=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0) \quad (h\ \text{番目のみ}\ 1\ \text{で他はすべて}\ 0) \tag{2.1.5}$$

と表わされ，m_i次元ユークリッド空間における単位ベクトルとみなすことができる．純戦略をこのようにみなすことによって，任意の混合戦略を，

$$\sigma_i=\sum_{s_i\in S_i}\sigma_i(s_i)s_i \quad \text{または} \quad \sigma_i=\sum_{h=1}^{m_i}\sigma_i(h)s_i^h \tag{2.1.6}$$

とも表わすことができる[6]．

プレイヤーiのもつ混合戦略の集合は，S_iの各元を頂点とする(m_i-1)次元単体$|s_i^1s_i^2\cdots s_i^{m_i}|$であり[7]，混合戦略単体（mixed strategy simplex）と呼ばれ，これをΔ_iで表わす．Δ_iはm_i次元ユークリッド空間のコンパクト凸集合である[8]．また，各プレイヤーのもつ混合戦略を1つずつ取りだして組にした$\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$を混合戦略プロファイル（mixed strategy profile）と呼ぶ．混合戦略プロファイルの集合を混合戦略空間（mixed strategy space）と呼び，$\Delta=\times_{i=1}^n\Delta_i$で表わす．

---

[6] 第3章3．2節では，形式的な処理がしやすいように，初めからs_i^hをm_i次元ユークリッド空間の単位ベクトル$e_i^h=(0,\cdots,0,1,0,\cdots 0)$に置き換える．

[7] 単体（simplex）は，位相幾何学の基本概念である．一般的な定義を述べるにはかなりの紙数を要するが，いくつかの点が与えられた場合，それらの点を頂点とする単体とは，単に，それらの点をすべて含む最小の凸集合（convex set）のことである．1点だけは0単体，2点を頂点とする単体は2点を結ぶ線分で1単体，3点を頂点とする単体は三角形（内部も含む）で2単体，4点を頂点とする単体は三角錐（内部も含む）で3単体と呼ばれる．本稿では，この程度の理解で十分である．詳細は，位相幾何学の入門書を参照のこと．

[8] Xがあるユークリッドの空間の部分集合の場合には，集合Xがコンパクト（compact）であるとは，単に，Xが有界閉集合になっていることである．単体がコンパクト集合であることは明らかである．

コンパクト集合の直積はコンパクトであり（Tihonovの定理），凸集合の直積も凸集合であるから，Δは，$m=\sum_{i=1}^{n} m_i$次元ユークリッド空間のコンパクト凸集合である．なお，$\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_i,\cdots,\sigma_n)$に対して，$\sigma_i$を除いた混合戦略プロファイルを

$$\sigma_{-i}:=(\sigma_i,\cdots,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\cdots,\sigma_n) \tag{2.1.7}$$

で表わし（この表わし方は，ゲーム理論の慣用である），すべてのσ_{-i}を元にもつ集合を

$$\Delta_{-i}:=\underset{j\in I-\{i\}}{\times}\Delta_j \tag{2.1.8}$$

と表す．ただし，$I-\{i\}$は$I=\{1,\cdots,i,\cdots,n\}$から元$i\in I$を除いた差集合である．また，$\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_i,\cdots,\sigma_n)$の$\sigma_i\in\Delta_i$だけを$\sigma_i'\in\Delta_i$に代えた（ただし，$\sigma_i'=\sigma_i$の場合も許す）混合戦略プロファイルを

$$(\sigma_i',\sigma_{-i}):=(\sigma_1,\cdots,\sigma_i',\cdots,\sigma_n)(\in\Delta) \tag{2.1.9}$$

と表わす．

混合拡大されたゲームにおける各プレイヤーの利得関数は期待利得関数（expected payoff function）と呼ばれ，混合戦略空間から実数の集合への関数$\pi_i:\Delta\to\mathbf{R}$であり，次のように定義される．まず，通常の非協力ゲームで仮定されるように，すべてのプレイヤーの行動は統計的に独立であるとする．すると，混合戦略プロファイル$\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)\in\Delta$によって純戦略プロファイル$s=(s_1,\cdots,s_n)\in S=\times_{i\in I}S_i$が使われる確率（$s$が実際のプレイで達成される確率）は，各プレイヤーの混合戦略$\sigma_i=\left(\sigma_i\left(s_i^1\right),\cdots,\sigma_i\left(s_i^{m_i}\right)\right)\in\Delta_i$によって純戦略$s_i\in S_i\ (i\in I)$に割り当てられる確率の単純な積（掛け算）

$$\sigma(s)=\prod_{i=1}^{n}\sigma_i(s_i)$$

になる．したがって，$\sigma_{-i}(s_{-i})=\prod_{j\in I-\{i\}}\sigma_j(s_j)$と表わすことにすると，混合戦略プロファイル$\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)\in\Delta$が使われるときのプレイヤー$i\in I$の期待利得は

$$\pi_i(\sigma):=\sum_{s\in S}\sigma(s)u_i(s)=\sum_{s_i\in S_i}\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\sigma_i(s_i)\sigma_{-i}(s_{-i})u_i(s_i,s_{-i}) \tag{2.1.10}$$

と定義される．ただし，$u_i(s)$はプレイヤーiの純戦略利得関数である．また，混合戦略を（2.1.6）のように表わすことによって，プレイヤーiの期待利得関数は

$$\pi_i(\sigma)=\pi_i(\sigma_i,\sigma_{-i})=\sum_{s_i\in S_i}\sigma_i(s_i)\pi_i(s_i,\sigma_{-i}) \tag{2.1.11}$$

のようにも表わされる．この期待利得関数の表わし方は，本稿ではしばしば利用される．なお，（2.1.10）で定義される期待利得関数は，明らかに$\Delta=\times_{i=1}^{n}\Delta_i$上で連続で，（2.1.11）の表わし方から各$\sigma_i\ (i\in I)$に関して線形であることが分かる．

関数$\pi:\Delta\to\mathbf{R}^n$を，$\pi(\sigma):=(\pi_1(\sigma),\cdots,\pi_n(\sigma))(\forall\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)\in\Delta)$で定義し，結合期待利得関

数（combined expected payoff function）と呼ぶことにする．

以上より，ゲーム$G=(I, S, u)$を混合拡大したゲームは，$\tilde{G}=(I, \Delta, \pi)$と定義される．ただし，本稿では，$\tilde{G}=(I, \Delta, \pi)$を$G=(I, \Delta, \pi)$と書くことにする．

2．2．ナッシュ均衡点の存在性

ここでは，まず，最適反応(best responce, best reply)とナッシュ均衡点(Nash equilibrium point)の一般的な定義を与え，それからナッシュ均衡点の形式的な存在証明を行なう．

定義2．1． $G=(I, \Delta, \pi)$において，$\sigma_i^* \in \Delta_i$がσ_{-i}に対するプレイヤー$i\ (\in I)$の最適反応であるとは，

$$\pi_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) \geq \pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i}), \qquad \forall \sigma_i \in \Delta_i \tag{2.2.1}$$

が成り立つときをいう[9]．特に，最適反応σ_i^*が純戦略であるときには，純戦略最適反応（pure strategy best responce）であるという．

定義2．2． 混合戦略プロファイル$\sigma^*=(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \in \Delta$がゲーム$G=(I, \Delta, \pi)$のナッシュ均衡点であるとは，

$$\pi_i(\sigma^*) \geq \pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*), \qquad \forall \sigma_i \in \Delta_i, \quad \forall i \in I \tag{2.2.2}$$

が成り立つときをいう．

混合戦略プロファイルσ^*がナッシュ均衡点であるとは，σ^*がプレイされるならば，どのプレイヤーもσ^*によって規定されている自分の戦略から他の戦略に変更する動機を持たないことを意味する．しかし，表1．1のゲームのように，ナッシュ均衡点は一意であるとは限らない．そこで，$G=(I, \Delta, \pi)$のすべてのナッシュ均衡点の集合をゲームGのナッシュ均衡集合（Nash equilibrium set）と呼び，$\Delta^{NE}(G)$で表わす．対称としているゲームが明らかな場合には，単に，Δ^{NE}と表わす．

次に，ナッシュ均衡点の存在性を証明するために，最適反応対応（best responce correspondence）と呼ばれる点対集合対応$B_i : \Delta_{-i} \to\!\!\to \Delta_i$を定義する．

---

9) (2.2.1)は，$\pi_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) = \max_{\sigma_i \in \Delta_i} \pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$と書き換えてもかまわない．最適反応の意味は，プレイヤーiは他のプレイヤーの混合戦略の組σ_{-i}がプレイされると予想したとき，自分の期待利得を最大にする戦略σ_i^*を選択するということである．

定義２．３． ゲーム$G=(I,\Delta,\pi)$において，$\sigma_{-i}\in\Delta_{-i}$に対するプレイヤー$i$の最適反応の集合を

$$B_i(\sigma_{-i}):=\{\sigma_i\in\Delta_i \mid \pi_i(\sigma_i,\sigma_{-i})\geq\pi_i(\sigma_i',\sigma_{-i}),\ \forall\sigma_i'\in\Delta_i\} \qquad (2.2.3)$$

で定義し，σ_{-i}に対するプレイヤーiの最適反応対応[10]と呼ぶ．

さらに，ゲーム$G=(I,\Delta,\pi)$の混合戦略プロファイル$\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$に対して，点対集合対応$B:\Delta\rightarrow\rightarrow\Delta$を

$$B(\sigma):=\mathop{\times}_{i=1}^{n}B_i(\sigma_{-i})$$

と定義する．このとき，次の定理２．１（ナッシュ均衡点の存在定理）が成り立つ．

定理２．１ (Nash 1951)．任意のゲーム$G=(I,\Delta,\pi)$において，

$$\sigma^*\in B(\sigma^*)$$

となる$\sigma^*=(\sigma_1^*,\cdots,\sigma_n^*)\in\Delta$が少なくとも１つ存在する．

定義２．２（ナッシュ均衡点の定義）および$B(\sigma)$の定義より，定理２．１の$\sigma^*=(\sigma_1^*,\cdots,\sigma_n^*)$は，ゲーム$G=(I,\Delta,\pi)$のナッシュ均衡点であることを意味するから，ナッシュ均衡集合は

$$\Delta^{NE}(G)=\{\sigma\in\Delta \mid \sigma\in B(\sigma)\}$$

と表わされる．したがって，定理２．１は，$\Delta^{NE}(G)\neq\emptyset$（$G$は任意の有限標準形ゲーム）と同値である．なお，定理２．１は，数学的には点対集合対応$B:\Delta\rightarrow\rightarrow\Delta$の不動点（fixed point）の存在を主張するものであるが，この種の不動点の存在を証明するには，次の角谷の不動点定理（Kakutani's fixed-point theorem）を利用することが多い．

角谷の不動点定理 (Kakutani 1941)[11]：Xを有限次元ベクトル空間の非空，凸，有界かつ閉な部分集合とする．このとき，点対集合対応$F:X\rightarrow\rightarrow X$が以下の２つの条件

(1)任意の$x\in X$に対して，$F(x)$はXの非空な凸部分集合，

(2)FはXにおいて上半連続（upper hemi-continuous）[12]

---

[10] (2.2.2) は，$B_i(\sigma_{-i})=\arg\max_{\sigma_i\in\Delta_i}\pi_i(\sigma_i,\sigma_{-i})$と書き換えてもかまわない．写像$f$：$X\rightarrow\mathbf{R}$が与えられたとき，$\arg\max_{x\in X}f(x)$とは，$f(x)$の値を最大にするすべての$x$の集合のことである．

[11] 厳密な証明は，たとえば，二階堂（1960），Border（1985），丸山（2002）等を見よ．

[12] 対応F：$X\rightarrow\rightarrow Y$のグラフを$G(F)=\{(x,y) \mid x\in X,\ y\in F(x)\}$と表わす．このとき，$F$が上半連続であるとは，任意の$x_0\in X$および$F(x_0)$を含む任意の開集合$V$に対して，$x\in U$ならば$F(x)\subseteq V$となる$x_0$の近傍（neighborhood）$U$が存在するときをいう．ただし，$Y$がコンパクト集合の場合には，$F:X\rightarrow\rightarrow Y$は上半連続⇔$F$のグラフ$G(F)$は$X\times Y$の閉部分集合，が成り立つ．詳細は，脚注10）で挙げている書物等を参照．

を満たすとき，F の不動点，すなわち，$x^* \in F(x^*)$ となる $x^* \in X$ が存在する．

（定理2．1の略証）$\Delta = \times_{i=1}^{n} \Delta_i$ は，$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ 次元ユークリッド空間の非空，凸，有界かつ閉な部分集合である．したがって，$\forall \sigma \in \Delta$ に対して，$B(\sigma)$ が Δ の非空かつ凸な部分集合になること，および B が Δ において上半連続であることをチェックすれば[13]，角谷の不動点定理により証明されたことになる．□

3．ナッシュ均衡集合の基本構造

3．1．最適反応と純戦略最適反応の関係

ゲーム $G = (I, \Delta, \pi)$ において，任意の $\sigma_{-i} \in \Delta_{-i}$ に対するプレイヤー $i\,(\in I)$ の純戦略最適反応が必ず存在することは明らかで，プレイヤー $i\,(\in I)$ の純戦略最適反応の集合を

$$PB_i(\sigma_{-i}) := \{ s_i \in S_i \mid \pi_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq \pi_i(s_i', \sigma_{-i}), \forall s_i' \in S_i \} \tag{3.1.1}$$

と定義し，これを σ_{-i} に対するプレイヤー i の純戦略最適反応対応（pure strategy best responce correspondence）と呼ぶことにする．

純戦略最適反応対応 $PB_i(\sigma_{-i})$ の任意の元の凸結合の集合を $\Delta PB_i(\sigma_{-i})$ と表わす．すなわち，

$$\Delta PB_i(\sigma_{-i}) := \left\{ \sum_{s_i \in PB_i(\sigma_{-i})} \lambda(s_i) s_i \;\middle|\; \sum_{s_i \in PB_i(\sigma_{-i})} \lambda(s_i) = 1,\ 0 \leq \lambda(s_i) \leq 1,\ \forall s_i \in PB_i(\sigma_{-i}) \right\}. \tag{3.1.2}$$

$\Delta PB_i(\sigma_{-i})$ は，Δ_i の部分集合であり，言うまでもなく，

$$PB_i(\sigma_{-i}) \subset \Delta PB_i(\sigma_{-i})$$

である．また，$\forall \sigma_i \in \Delta_i$ に対して，σ_i の台（support）を

$$\mathrm{supp}(\sigma_i) := \{ s_i \in S_i \mid \sigma_i(s_i) > 0 \} \tag{3.1.3}$$

で表わす．ただし，$\sigma_i(s_i)$ は混合戦略 σ_i によって純戦略 $s_i \in S_i$ に割り当てられる確率である．このとき，次の定理3．1が成り立つ．定理3．1は，最適反応を見つけ出すのに，きわめて有用である．

定理3．1． $G = (I, \Delta, \pi)$ において，任意に固定された $\sigma_{-i} \in \Delta_{-i}$ に対して，

[13] $\forall \sigma \in \Delta$ に対して，$B(\sigma)$ が Δ の非空かつ凸な部分集合になることは，(2.2.8) で定義されている期待利得関数が $\Delta = \times_{i=1}^{n} \Delta_i$ 上で連続で各 $\sigma_i\,(i \in I)$ に関して線形であることから容易に示される．さらに，このことから $B(\sigma)$ が Δ のコンパクトな部分集合になることも示される．$B(\sigma)$ の上半連続性については通常の方法に従えばよい――機械的だがけっこう面倒である――．

$$B_i(\sigma_{-i}) = \Delta PB_i(\sigma_{-i}). \tag{3.1.4}$$

（証明）固定された$\sigma_{-i} \in \Delta_{-i}$に対して，プレイヤー$i$が混合戦略$\sigma_i = (\sigma_i(s_i))_{s_i \in S_i}$を選択するときの期待利得は

$$\pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i)\pi_i(s_i, \sigma_{-i})$$

で表わされる．$\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$，$0 \leq \sigma_i(s_i) \leq 1 (\forall s_i \in S_i)$だから，

$$\max_{\sigma_i \in \Delta_i} \pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) \max_{s_i \in S_i} \pi_i(s_i, \sigma_{-i})$$

は明らか．これは，σ_{-i}に対するプレイヤーiの最適反応が，σ_{-i}に対する純戦略最適反応の凸結合になっていることを意味する．これで必要性が示されたことになる．なお，十分性については，$\alpha = \max_{s_i \in S_i} \pi_i(s_i, \sigma_{-i})$とおき，$\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1 (\forall \sigma_i \in \Delta_i)$であることより，

$$\alpha = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) \max_{s_i \in S_i} \pi_i(s_i, \sigma_{-i}), \quad \forall \sigma_i \in \Delta_i$$

が成り立つことに注意すれば容易に分かる．□

定理３．１の意味を説明しよう．たとえば，表１．１のゲームにおいて，プレイヤー２の混合戦略$\sigma_2 = (\sigma_2(s_2^1), \sigma_2(s_2^2)) = (1/2, 1/2)$に対するプレイヤー１の最適反応対応を求めるには，$\sigma_2$に対する純戦略最適反応対応$PB_1(\sigma_2)$を求め，$PB_1(\sigma_2)$の元のすべての凸結合の集合$\Delta PB_1(\sigma_2)$を求めればよいということである．具体的には，

$$\pi_1(s_1^1, \sigma_2) = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 0 = 1, \quad \pi_1(s_1^2, \sigma_2) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 = 1, \quad \pi_1(s_1^3, \sigma_2) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

だから，

$$PB_1(\sigma_2) = \{s_1^1, s_1^2\} = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$$

となり，プレイヤー１の最適反応対応は

$$B_1(\sigma_2) = \Delta PB_1(\sigma_2) = \{\lambda s_1^1 + (1-\lambda)s_1^2 \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} = \{(\lambda, 1-\lambda, 0) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

である．

次の定理３．２は，ある混合戦略が最適反応になっていることを確認するのに便利である．

定理３．２． $G = (I, \Delta, \pi)$において，$\sigma_{-i} \in \Delta_{-i}$に対するプレイヤー$i (\in I)$の最適反応対応は

$$B_i(\sigma_{-i}) = \{\sigma_i \in \Delta_i \mid \pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq \pi_i(s_i, \sigma_{-i}), \forall s_i \in S_i\}. \tag{3.1.5}$$

（証明）ある$\sigma_i \in B_i(\sigma_{-i})$に対して，$\pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) < \pi_i(s_i, \sigma_{-i}) (\exists s_i \in S_i)$であるとする．このときには，明らかに，$\pi_i(s_i', \sigma_{-i}) < \pi_i(s_i, \sigma_{-i}) (\exists s_i \in \mathrm{supp}(\sigma_i))$となっている．このことは，定理３．１に矛盾する．□

表１．１のゲームにおいて，定理３．２を使って，$\sigma_1 = (\lambda, 1-\lambda, 0)$が$(0 \leq \forall \lambda \leq 1)$が$\sigma_2 = (1/2,$

1/2)に対する最適反応になっていることを確認するのは容易であるから，定理3．2を使って，プレイヤー2の混合戦略$\sigma_2=(1/2,\ 1/2)$に対するプレイヤー1の最適反応対応$B_1(\sigma_2)$を求めてみよう．表記の簡便さのために，$\sigma_1(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3)(0\leq\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3\leq 1,\ \lambda^1+\lambda^2+\lambda^3=1)$とおくと，

$$\pi_1(\sigma_1,\sigma_2)=\lambda^1+\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda^3=1-\frac{1}{2}\lambda^3 \quad (\because \lambda^1+\lambda^2+\lambda^3=1)$$

となる．$\pi_1\left(s_1^1,\sigma_2\right)=\pi_1\left(s_1^2,\sigma_2\right)=1$，$\pi_1\left(s_1^3,\sigma_2\right)=\frac{1}{2}$だから，

$$1-\frac{1}{2}\lambda^3\geq 1, \qquad 1-\frac{1}{2}\lambda^3\geq\frac{1}{2}$$

をみたす$\lambda_3\in[0,1]$を求めればよいが，$\lambda^3=0$だけであることは容易に分かる．したがって，

$$B_1(\sigma_2)=\left\{(\lambda^1,\lambda^2,0)\mid\lambda^1+\lambda^2=1,\ 0\leq\lambda^1,\lambda^2\leq 1\right\}$$

が得られる．もちろん，$\lambda^1=\lambda$とおけば，$B_1(\sigma_2)=\{(\lambda,1-\lambda,0)\}$である．

3．2．ナッシュ均衡集合の成分

ここでは，プレイヤーiのh番目の純戦略をs_i^hと表わす代わりに，m_i次元単位ベクトル

$$\mathrm{e}_i^h=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0) \quad (h\text{ 番目のみ 1 で他はすべて 0}) \tag{3.2.1}$$

で表わすことにする．したがって，プレイヤー$i\,(\in I)$の純戦略の集合は$S_i=\left\{\mathrm{e}_i^1,\mathrm{e}_i^2,\cdots,\mathrm{e}_i^{m_i}\right\}$である．$S_i$の任意の元は$\mathrm{e}_i$で表わす．すると，混合戦略$\sigma_i\in\Delta_i$は

$$\sigma_i=\sum_{h=1}^{m_i}\sigma_i(h)\,\mathrm{e}_i^h \tag{3.2.2}$$

というように，m_i個の単位ベクトル$\mathrm{e}_i^1,\mathrm{e}_i^2,\cdots,\mathrm{e}_i^{m_i}$の凸結合で表わすことができる．このようにして，プレイヤーiの混合戦略の集合（混合戦略単体）Δ_iは，$\mathrm{e}_i^1,\mathrm{e}_i^2,\cdots,\mathrm{e}_i^{m_i}$を頂点とする$(m_i-1)$次元単体$\left|\mathrm{e}_i^1\mathrm{e}_i^2\cdots\mathrm{e}_i^{m_i}\right|$になる[14]．各頂点はプレイヤー$i$の純戦略を表わす．以下，$\Delta_i=\left|\mathrm{e}_i^1\mathrm{e}_i^2\cdots\mathrm{e}_i^{m_i}\right|$とする．特に，$\Delta_i$の相対的内部（relative interior）[15]の任意の点はプレイヤーiの完全混合戦略（completely mixed strategy）と呼ばれる．

表1．1のゲームを使って，ナッシュ均衡集合がどのような構造をもっているかを具体的に説明しよう．s_1^hを$\mathrm{e}_1^h\,(h=1,2,3)$，$s_2^h$を$\mathrm{e}_2^h\,(h=1,2)$と置き換え，$\Delta_1=\left|\mathrm{e}_1^1\mathrm{e}_1^2\mathrm{e}_1^3\right|$および$\Delta_2=\left|\mathrm{e}_2^1\mathrm{e}_2^2\right|$を図示したのが，それぞれ図3．1(a)と図3．1(b)である．各プレイヤーの任意の混合戦略$\sigma_i\,(i=1,2)$は，原点Oを始点とし$\Delta_i\,(i=1,2)$上の1点を終点とするベクトルになっている．

---

[14] このような単体を標準単体（standard simplex）という．

[15] $\Delta_i=\left|\mathrm{e}_i^1\mathrm{e}_i^2\cdots\mathrm{e}_i^{m_i}\right|$を$m_i$次元ユークリッド空間$\mathbf{R}^{m_i}$の部分集合と見たとき，$\Delta_i$は空集合となるので，$\Delta_i$の内部の点の集合は相対的内部と呼ばれる．

図3．2(a)は，プレイヤー2の純戦略最適反応をプレイヤー1の混合戦略単体Δ_1内に書き表わしたものであり，図3．2(b)は，プレイヤー1の純戦略最適反応をプレイヤー2の混合戦略単体Δ_2に書き添えたものである．図3．2(a)で，点Xはプレイヤー1の混合戦略$\frac{2}{3}e_1^1+\frac{1}{3}e_1^3$,

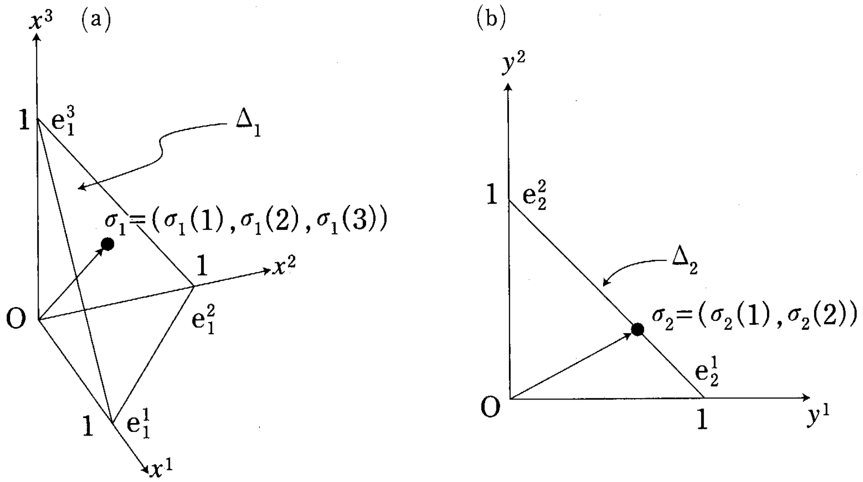

図3．1．各プレイヤーの混合戦略集合

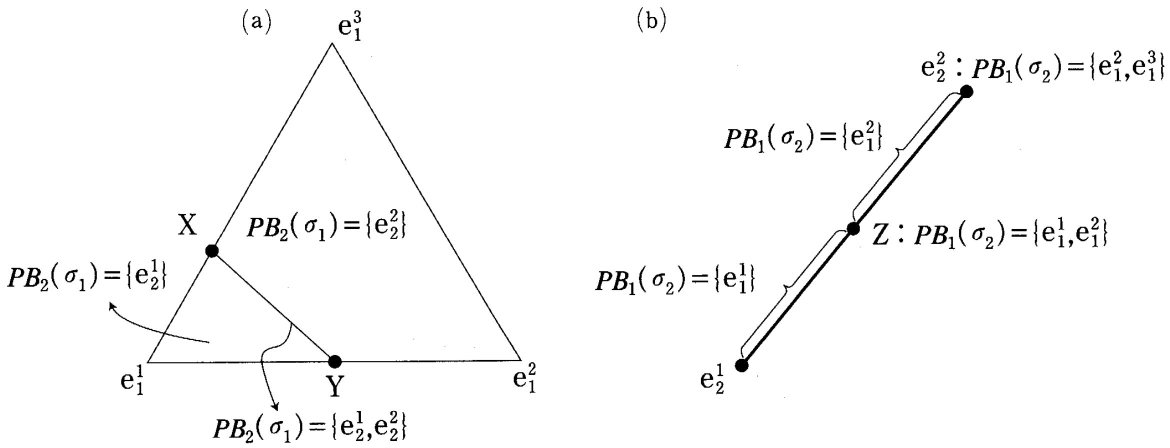

図3．2．純戦略最適反応

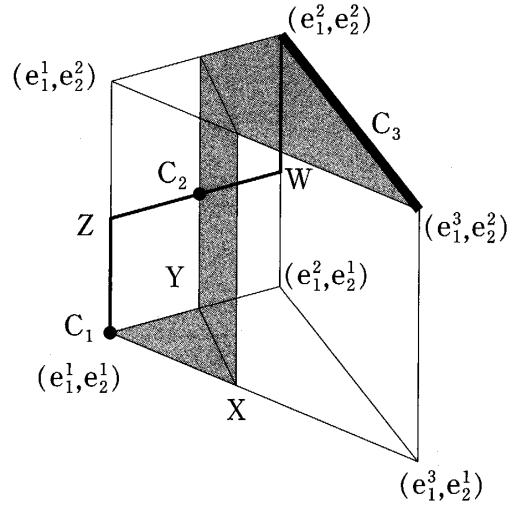

図3．3．混合戦略空間とナッシュ均衡集合（黒点と太い実線の部分）

点Yはプレイヤー1の混合戦略$\frac{1}{2}e_1^1+\frac{1}{2}e_1^2$である．線分XY上では，$e_2^1$，$e_2^2$ともにプレイヤー2の純戦略最適反応である．図3．2(b)の点Zは，プレイヤー2の混合戦略$\frac{1}{2}e_2^1+\frac{1}{2}e_2^2$である．点Zにおけるプレイヤー1の純戦略最適反応はe_1^1とe_1^2である．点e_2^2におけるプレイヤー1の純戦略最適反応はe_1^2とe_1^3である．

図3．3は，表1．1のゲームの各プレイヤーの最適反応対応とナッシュ均衡集合Δ^{NE}を図示したものである．この三角柱が混合戦略空間である．プレイヤー1の最適反応対応$B_1(\sigma_2)$のグラフは，$C_1\sim Z\sim W\sim(e_1^2,e_2^2)\sim(e_1^3,e_2^2)$の折線，プレイヤー2の最適反応対応$B_2(\sigma_1)$のグラフは，網掛けの面である．ナッシュ均衡点は$B_1(\sigma_2)$と$B_2(\sigma_1)$のグラフが交わった点であり，$\Delta^{NE}$を構成する成分は以下の$C_1, C_2, C_3$の3つである；

$$C_1=\{(e_1^1,e_2^1)\},\quad C_2=\left\{\left(\frac{1}{2}e_1^1+\frac{1}{2}e_1^2,\ \frac{1}{2}e_2^1+\frac{1}{2}e_2^2\right)\right\},\quad C_3=\{(te_1^2+(1-t)e_1^3,e_2^2)\,|\,0\le t\le 1\}.$$

したがって，ナッシュ均衡集合は

$$\Delta^{NE}=C_1\cup C_2\cup C_3 \qquad (C_k\cap C_l=\emptyset,\ k\neq l;\ k,l=1,2,3)$$

である．

図3．3を見れば分かるように，表1．1のゲームのナッシュ均衡集合Δ^{NE}は，互いに素な3つの連結成分[16]C_1, C_2, C_3から成っている．以下，このことを一般化する．

[16] 位相空間Xの部分集合（位相空間Xそのものでもかまわない）Aが連結（connected）であるとは，互いに共通点のない2つの空でない開集合の和として表わせないときをいう．$x\in X$の連結成分（connected component）とは，Xの部分集合でxを含む最大の連結集合のことである．図3．3のC_3が連結集合であることは明らかである．C_1, C_2のような1点集合（singleton）も連結集合である．連結性についての厳密な定義は，位相空間論の入門書か解析学のテキストを参照のこと．

$PB_i(\sigma_{-i})$の定義式（3.1.1）を，

$$PB_i(\sigma_{-i})=\{\mathrm{e}_i \in S_i | \pi_i(\mathrm{e}_i, \sigma_{-i}) \geq \pi_i(\mathrm{e}'_i, \sigma_{-i}), \forall \mathrm{e}'_i \in S_i\} \tag{3.2.3}$$

と書き換え，定理3．2の（3.1.5）も

$$B_i(\sigma_{-i})=\{\sigma_i \in \Delta_i | \pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq \pi_i(\mathrm{e}_i, \sigma_{-i}), \forall \mathrm{e}_i \in S_i\} \tag{3.2.4}$$

と書き換える．

定理3．3． $G=(I, \Delta, \pi)$において，$\sigma^*=(\sigma_1^*,\cdots,\sigma_n^*)$がナッシュ均衡点であるための必要十分条件は，

$$\pi_i(\sigma^*)-\pi_i(\mathrm{e}_i^h, \sigma_{-i}^*) \geq 0, \qquad h=1,\cdots,m_i, \quad \forall i \in I=\{1,2,\cdots,n\} \tag{3.2.5}$$

が成り立つことである．

（証明）$\sigma^*=(\sigma_1^*,\cdots,\sigma_n^*)$がナッシュ均衡点であれば，（3.2.5）を満足することは明らか．逆は，定理3．2より容易に示される．□

定理3．3より，ナッシュ均衡集合は，

$$\Delta^{NE}=\{\sigma \in \Delta | \pi_i(\sigma)-\pi_i(\mathrm{e}_i^h, \sigma_{-i}) \geq 0, \forall i \in I, h=1,2,\cdots,m_i\} \tag{3.2.6}$$

と表わされる．$\pi_i(\sigma)$と$\pi_i(\mathrm{e}_i^h, \sigma_{-i})$は多項式であるから，$\pi_i(\sigma)-\pi_i(\mathrm{e}_i^h, \sigma_{-i})$は多項式で

$$\pi_i(\sigma)-\pi_i(\mathrm{e}_i^h, \sigma_{-i}) \geq 0, \quad \forall i \in I, \quad h=1,2,\cdots,m_i \tag{3.2.7}$$

は，$m=\sum_{i=1}^{n} m_i$個の多項不等式系である．つまり，ナッシュ均衡集合Δ^{NE}は，m個の各多項式が非負になるようなベクトル変数σの集合の有限個の共通部分になるということである．このような集合は，互いに素な有限個の連結成分からなっている．このことを一般的に示したのが，次の定理3．4である．

定理3．4（Kohlberg and Mertens 1986）．任意のゲーム$G=(I, \Delta, \pi)$のナッシュ均衡集合Δ^{NE}は，（互いに素な）有限個の連結成分をもつ．

定理3．4は，Kohlberg and Mertens（1986）のPROPOSITION 1の前半部分に対応する[17]．

[17] Kohlberg and Mertens（1986）のPROPOSITION 1の後半部分は，ナッシュ均衡集合を構成する連結成分の少なくとも1つは，任意の摂動ゲーム（perturbed game）に対して安定であることを主張している．ここで言う摂動ゲームとは，プレイヤーの利得関数をわずかに変えたゲームのことである．利得関数を任意にわずかに変えてもナッシュ均衡点が元のゲームのナッシュ均衡点のすぐ近いところにあれば，そのナッシュ均衡点は安定であるというわけである．Kohlberg and Mertens（1986）では，このような連結成分を超安定集合（hyperstable set）と呼んでいる．さらに，超安定集合の概念を強めた戦略的安定集合（strategically stable set）の存在性を証

かっこ（　）の中の「互いに素な」は筆者が補ったものである．この定理は，ファン・デル・ヴェルデンの定理（van der Waerden 1939）――有限代数不等式系の解を構成するコンパクト成分は単体分割可能である[18]――から直ちに得られる．定理3.4の厳密な証明はごく形式的で分かり難いが，その意味なら直観的に理解できる．

すべての有限標準形ゲームにはナッシュ均衡点が存在し（定理２．１），混合戦略空間は有界であるから，(3.2.7) の不等式系の解空間は m 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^m$ 内の非空な有界集合である．また，その解空間が $\mathbf{R}^m$ のいくつかの閉部分集合から構成されることもほぼ自明である―― (3.2.7) の不等式系の各不等式はすべて等号付きである――．要するに，ナッシュ均衡集合を構成する各成分はコンパクトである．このような成分が連結集合になっていることは明らかであると思われる．

４．ナッシュ写像の性質

４．１．ナッシュ写像の不動点

本節では，ナッシュ写像（Nash mapping）に不動点が存在することを簡単に示し，次にその不動点が２．２節で定義したナッシュ均衡点の定義（定義２．２）と同値であることを証明する．

定義４．１． ゲーム$G=(I,\Delta,\pi)$において，写像$f_i^{s_i}:\Delta\to[0,1]$を

$$f_i^{s_i}(\sigma)=\frac{\sigma_i(s_i)+\max\{0,\pi_i(s_i,\sigma_{-i})-\pi_i(\sigma)\}}{1+\sum_{s_i'\in S_i}\max\{0,\pi_i(s_i',\sigma_{-i})-\pi_i(\sigma)\}},\quad \forall i\in I,\quad \forall s_i\in S_i \tag{4.1.1}$$

で定義する．また，写像$f_i:\Delta\to\Delta_i$は，写像$f_i^{s_i}:\Delta\to[0,1]$を組にした

$$f_i=\left(f_i^{s_i}\right)_{s_i\in S_i} \tag{4.1.2}$$

のこととする．このとき，ナッシュ写像$F:\Delta\to\Delta$が，

$$F=(f_i)_{i\in I}\qquad (\text{または，}F=\{f_i^{s_i}\}_{i\in I,\ s_i\in S_i}\text{と表わす}) \tag{4.1.3}$$

で定義される．

$\forall\sigma\in\Delta$に対して，$0\le f_i^{s_i}(\sigma)\le 1(\forall\in I,\forall s_i\in S_i)$は明らかであり，$\sum_{s_i\in S_i}f_i^{s_i}(\sigma)=1(\forall i\in I)$となることは，容易な計算によってすぐに確かめられる．ゆえに，f_iは，S_i上の確率分布（プレ

明し，これを非協力ゲームの解として提案している．この点についての詳細は別稿で考察する．

[18] 多面体（polyhedron）の単体分割あるいは三角形分割（triangulation）とは，文字通り多面体をいくつかの単体に分割することだが，多面体でない図形――たとえば，球体――に対しても，単体分割が拡張される．そして，単体分割可能（triangulable）な集合の成分は連結集合になっているのである．詳細は，やはり位相幾何学の入門書を参照すること．

イヤー i の混合戦略）を与える．したがって，f_iは，$\sigma=(\sigma_i,\sigma_{-i})\in\Delta$が与えられたとき，プレイヤー i がσ_iからf_iへ使う混合戦略を変更する写像であることを意味する．

定理４．１（Nash 1951）．ナッシュ写像（4.1.3）には不動点が存在する．

（証明）Δ はユークリッド空間のコンパクト凸集合であり，$f_i(\sigma)\in\Delta_i\,(\forall i\in I)$であることより$F(\sigma)\in\Delta\,(\forall\sigma\in\Delta)$である．また，$\pi_i(\sigma)$は連続であり，$\max\{0,\pi_i(s_i,\sigma_{-i})-\pi_i(\sigma)\}$は２つの連続関数の最大値であるから連続である．よって，F は Δ から Δ への中への連続写像である．したがって，ブラウワーの不動点定理（Brouwer's fixed-point theorem）[19]より，（4.1.3）は不動点をもつ．□

定理４．２． ゲーム$G=(I,\Delta,\pi)$において，$\sigma\in\Delta$が G のナッシュ均衡点であるための必要十分条件は，$\sigma\in\Delta$がナッシュ写像 $F:\Delta\rightarrow\Delta$ の不動点であることである．

（証明）[20]以下，$i\in I$は任意に取られているものとする．したがって，$\sigma=(\sigma_i,\sigma_{-i})$が与えられたとき，それがナッシュ均衡点であることは，定義２．１と定義2.2から，σ_iがσ_{-i}に対する最適反応になっていること，すなわち，$\pi_i=(\sigma_i,\sigma_{-i})\geq\pi_i(\sigma_i',\sigma_{-i})(\forall\sigma_i'\in\Delta_i)$と記せばよい．

$\Rightarrow$：$\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)\in\Delta$がナッシュ均衡点であれば，

$$\pi_i(\sigma_i,\sigma_{-i})\geq\pi_i(s_i,\sigma_{-i}),\qquad\forall s_i\in S_i\tag{4.1.4}$$

が成り立つので

$$\max\{0,\pi_i(s_i,\sigma_{-i})-\pi_i(\sigma)\}=0,\qquad\forall s_i\in S_i$$

となる．したがって，（4.1.1）式より

$$f_i^{s_i}(\sigma)=\sigma_i(s_i),\qquad\forall s_i\in S_i$$

となり，$\sigma\in\Delta$はナッシュ写像の不動点である．

$\Leftarrow$：次に，ナッシュ写像 $F:\Delta\rightarrow\Delta$ の不動点$\sigma\in\Delta$がナッシュ均衡点であることを示す．そのためには，定理３．２より，$\sigma=(\sigma_i,\sigma_{-i})$が

$$\pi_i(\sigma_i,\sigma_{-i})\geq\pi_i(s_i,\sigma_{-i}),\qquad\forall s_i\in S_i$$

を満たすことを示せばよい．

$\sigma\in\Delta$は F の不動点――$f_i^{s_i}(\sigma)=\sigma_i(s_i)(\forall i\in I,\forall s_i\in S_i)$――だから，

---

[19] ブラウワーの不動点定理とは，「X をユークリッド空間のコンパクト凸集合，f を X から X への中への連続関数とする．このとき，f は不動点をもつ」というものである．厳密な証明は，脚注10）で挙げている書物等を参照．

[20] ここでの証明は，Fudenberg and Tirole（1992）――Chapter12, p. 482――による証明の不十分な点を補ったものである．

$$\sigma_i(s_i)\left(\sum_{s_i'\in S_i}\max\left\{0,\pi_i(s_i',\sigma_{-i})-\pi_i(\sigma)\right\}\right)=\max\{0,\pi_i(s_i,\sigma_{-i})-\pi_i(\sigma)\} \tag{4.1.5}$$

が成り立っていなくてはならない―$f_i^{s_i}(\sigma)=\sigma_i(s_i)$―を使った（4.1.1）の容易な変形――.

ここで，$s_i\in S_i$を$s_i\notin \mathrm{supp}(\sigma_i)$の場合と$s_i\in \mathrm{supp}(\sigma_i)$の場合に分けて調べる.

まず，$s_i\notin \mathrm{supp}(\sigma_i)$の場合，$\sigma_i(s_i)=0(\forall s_i\notin \mathrm{supp}(\sigma_i))$だから，（4.1.5）は

$$0=\max\{0,\pi_i(s_i,\sigma_{-i})-\pi_i(\sigma)\},\ \forall s_i\notin \mathrm{supp}(\sigma_i) \tag{4.1.6}$$

となる．よって，

$$\pi_i(s_i,\sigma_{-i})\leq\pi_i(\sigma),\ \forall s_i\notin \mathrm{supp}(\sigma_i), \tag{4.1.7}$$

次に，$s_i\in \mathrm{supp}(\sigma_i)$の場合を調べる.（4.1.6）より，$\sum_{s_i\in \mathrm{supp}(\sigma_i)}\max\left\{0,\pi_i(s_i',\sigma_{-i})-\pi_i(\sigma)\right\}$となるので，

$$\sum_{s_i'\in S_i}\max\left\{0,\pi_i(s_i',\sigma_{-i})-\pi_i(\sigma)\right\}=\sum_{s_i'\in \mathrm{supp}(\sigma_i)}\max\left\{0,\pi_i(s_i',\sigma_{-i})-\pi_i(\sigma)\right\}$$

が成り立つ．したがって，$\forall s_i\in \mathrm{supp}(\sigma_i)$に対して，

$$\sigma_i(s_i)\left(\sum_{s_i'\in \mathrm{supp}(\sigma)}\max\left\{0,\pi_i(s_i',\sigma_{-i})-\pi_i(\sigma)\right\}\right)=\max\{0,\pi_i(s_i,\sigma_{-i})-\pi_i(\sigma)\} \tag{4.1.8}$$

となる．以下，次の２つのケース①，②に分けて考える.

① $\pi_i(s_i,\sigma_{-i})\leq\pi_i(\sigma),\ \exists s_i\in \mathrm{supp}(\sigma)$,　② $\pi_i(s_i,\sigma_{-i})\geq\pi_i(\sigma),\ \forall s_i\in \mathrm{supp}(\sigma_i)$.

①の場合，$\pi_i(s_i,\sigma_{-i})\leq\pi_i(\sigma)$を成り立たせる$s_i\in \mathrm{supp}(\sigma_i)$に対して

$$\max\{0,\pi_i(s_i,\sigma_{-i})-\pi_i(\sigma)\}=0$$

となる．$\sigma_i(s_i)>0$だから，（4.1.8）より

$$\pi_i(s_i',\sigma_{-i})\leq\pi_i(\sigma),\quad \forall s_i'\in \mathrm{supp}(\sigma_i) \tag{4.1.9}$$

でなくてはならない.

②の場合に，$\pi_i(s_i,\sigma_{-i})=\pi_i(\sigma)(\exists s_i\in \mathrm{supp}(\sigma_i))$ならば，（4.1.8）より

$$\pi_i(s_i,\sigma_{-i})=\pi_i(\sigma),\quad \forall s_i\in \mathrm{supp}(\sigma_i). \tag{4.1.10}$$

となる．残りは，

$$\pi_i(s_i,\sigma_{-i})>\pi_i(\sigma),\quad \forall s_i\in \mathrm{supp}(\sigma_i). \tag{4.1.11}$$

の場合だけであるが，これは不可能である．直観的に明らかであるが，簡単に示す．$\sigma=(s_i,\sigma_{-i})$におけるσ_iの台$\mathrm{supp}(\sigma_i)$上の確率分布の集合を$\Delta(\mathrm{supp}(\sigma_i))$と表わすと，（4.1.11）が成り立つとき，明らかに，$\pi_i(\sigma_i',\sigma_{-i})>\pi_i(\sigma_i,\sigma_{-i})\left(\forall\sigma_i'\in\Delta(\mathrm{supp}(\sigma_i))\right)$が成り立つが，$\sigma_i\in\Delta(\mathrm{supp}(\sigma_i))$であるから，これは矛盾.

よって，

$$\pi_i(s_i,\sigma_{-i}) \le \pi_i(\sigma), \qquad \forall s_i \in \mathrm{supp}(\sigma_i) \tag{4.1.12}$$

が成り立ち，(4.1.7) と合わせて写像F の不動点$\sigma \in \Delta$はナッシュ均衡点である．□

4．2．ナッシュ写像による最適反応の導出

本節では，ナッシュ写像を繰り返し適用することによって，プレイヤーの最適反応が導かれることを説明する[21]．表1．1のゲームにおいて，$\sigma_2=(1/2, 1/2)$の場合，プレイヤー1の混合戦略$\sigma_1=\left(\sigma_1(s_1^1),\sigma_1(s_1^2),\sigma_1(s_1^3)\right)$にナッシュ写像を適用してみる．分かり易いように，(4.1.1) 式を表1．1のゲームに合わせて，次のように書き換えておく；

$$f_1^{s_1}(\sigma_1,\sigma_2)=\frac{\sigma_1(s_1)+\max\{0,\pi_1(s_1,\sigma_2)-\pi_1(\sigma_1,\sigma_2)\}}{1+\sum_{h=1}^{3}\max\left\{0,\pi_1\left(s_1^h,\sigma_2\right)-\pi_1(\sigma_1,\sigma_2)\right\}}. \tag{4.2.1}$$

まず，σ_2に対する最適反応$\sigma_1=(\lambda,1-\lambda,0)$を適用してみる．3．1節で求めているように，

$$\pi_1(\sigma_1,\sigma_2)=\pi_1\left(s_1^1,\sigma_2\right)=\pi_1\left(s_1^2,\sigma_2\right)=1, \qquad \pi_1\left(s_1^3,\sigma_2\right)=\frac{1}{2}$$

だから，(4.2.1) 式より，

$$f_1^{s_1^1}(\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1\left(s_1^1\right)=\lambda, \quad f_1^{s_1^2}(\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1\left(s_1^2\right)=1-\lambda, \quad f_1^{s_1^3}(\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1\left(s_1^3\right)=0$$

となり，σ_2に対する最適反応$\sigma_1=(\lambda,1-\lambda,0)(0\le\forall\lambda\le1)$は，写像 (4.2.1) によって変更されないことを意味する．このことは，定理4．2で示した通りである．

次に，$\sigma_1=(0,0,1)$を適用してみる．このときには，

$$\pi_1(\sigma_1,\sigma_2)=\pi_1\left(s_1^3,\sigma_2\right)=\frac{1}{2}, \quad \pi_1\left(s_1^1,\sigma_2\right)=\pi_1\left(s_1^2,\sigma_2\right)=1$$

であるから，$\sum_{h=1}^{3}\max\left\{0,\ \pi_i\left(s_i^h,\sigma_2\right)-\pi_i(\sigma_1,\sigma_2)\right\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=1$となり，

$$f_1^{s_1^1}(\sigma_1,\sigma_2)=f_1^{s_1^2}(\sigma_1,\sigma_2)=\frac{0+1/2}{1+1}=\frac{1}{4}, \qquad f_1^{s_1^3}(\sigma_1,\sigma_2)=\frac{1+0}{1+1}=\frac{1}{2}$$

となる．これは，プレイヤー1は，プレイヤー2が混合戦略$\sigma_2=(1/2, 1/2)$を使うと予想しているときに，最初に想定した混合戦略$\sigma_1=(0,0,1)$から混合戦略$\sigma_1'=(1/4, 1/4, 1/2)$へ使う戦略を変更することを意味する．明らかに，$\sigma_2=(1/2, 1/2)$に対して，プレイヤー1に少ない期待利得しか与えない純戦略s_1^3に割り当てられる確率が減少している．さらに，$\sigma_1'=(1/4, 1/4, 1/2)$に対しても (4.2.1) を適用すれば，純戦略$s_1^3$に割り当てられる確率は減少する．このように，新しく得られる混合戦略に (4.2.1) を繰り返し適用していけば，σ_2に対する最適反応の1つである$\sigma_1=(1/2, 1/2, 0)$に限りなく近づいていく．なお，(4.2.1) の繰り返し適用によってどの最適

[21] 例を使えば直観的に納得できるので，一般的証明は略した．

反応に達するかは，プレイヤー１が最初に想定した混合戦略に依存することは明らかである[22)].

5. まとめ

実際のゲームでナッシュ均衡点を見つけ出すのは易しくはないが，すでに述べているように，ナッシュ均衡はきわめて単純な概念であり，数学的にも難しいものではない．どのようにして意味のある数学的定義を与えるかが難しいのである．しかし，ナッシュ均衡という概念は，その単純さ（あるいはその当たり前さ）ゆえに，多くの内容を包摂している．以下，そのことをおおまかに概観し，次に続くべき議論について述べる．

本稿では，ナッシュ均衡点の２通りの存在証明を与えた．第２章で，今日では通常行われている証明を，第４章では，ナッシュ写像を使った証明を与えている．証明法の違いは，使っている写像の違いにすぎない．しかし，証明に使った写像の違いは，ナッシュ均衡に対して異なった解釈を与える．まず，後者では，初期値さえ与えられれば，プレイヤーに複雑な推論を行う能力がなくても純戦略に対する経験的な情報の蓄積のみによって各プレイヤーが合理的な行動を選択できることを暗示している[23)]．一方，前者では，そのようなプロセスを経なくてもすべてのプレイヤーが合理的な推論のみによって最適な行動を見つけ出すことができることを仮定している．ナッシュ均衡に対するこれら２通りの解釈から非協力ゲーム理論は，1970年代以降，２通りの方向に向かうことになる[24)].

前者の解釈をさらに押し進め人間の合理性を追求したのは，1970年代後半から1980年代にかけて理論経済学会において大流行したナッシュ均衡の精緻化（refinements of Nash equilibrium)

[22)] ナッシュ写像のような写像を使って一種の動学過程を定義し，ナッシュ均衡点を求めるアルゴリズムを構築できそうに見える．しかし，かつて，仮想的動学（fictitious play）と呼ばれる過程が考えられたが，収束しない例（Shaplay 1964）が発見され，廃れてしまった――松井（2002）にその例が載せられている――．ところが，1990年代になって，進化ゲーム理論による再解釈がなされた．進化的過程では収束しなくても問題にならないからである．

[23)] ナッシュ自身は，彼の未公刊学位論文（1950年）の中で自らの均衡理論を集団均衡（population equilibrium）として捉えていたそうである――ホッフバウアー・シグムント（2001）の「ゲーム理論家に対する序文」，岡田（1996）の第12章――．ナッシュ均衡に対するこのような見方は，長い間多くの経済学者やゲーム理論研究者から無視されてきたが，脚注22でも述べているように，1990年代になって，進化ゲーム理論による再解釈がなされた．

[24)] 1960年代のゲーム理論は，協力ゲームの研究が中心で，非協力ゲームの研究が盛んになったのは，1970年代以降であり，現在では，ゲーム理論の研究は非協力ゲームに関するものがほとんどである．これは，ナッシュとともに1994年にノーベル経済学賞を受賞したゼルテン（R.Selten）やハルサーニ（J.Harsanyi）らの貢献が大きい．ゲーム理論の歴史については，岡田（1996）の第１章で手際よく要約されている．

と呼ばれる理論である．均衡精緻化理論は，非協力ゲーム理論をプレイヤーに選択すべき行動を指示するという規範的理論と考える立場を取っており，複数のナッシュ均衡点が存在する場合，より合理的なナッシュ均衡点を選び出すことを目的とする．その引き金になったのが，Selten（1975）による完全均衡（perfect equilibrium）という概念である[25]．たとえば，表1．1のゲームにおいて，(s_1^3, s_2^2)はナッシュ均衡点の1つであるが，仮にゲーム理論の専門家がプレイヤー1に「プレイヤー2はs_2^2を選択するから，s_1^3を選択せよ」と指示したとしても，プレイヤー1が合理的であるならば，実際のプレイでは，s_1^3を選択せずs_1^2を選択するであろう――s_1^3はs_1^2によって，弱く支配されている（weakly dominated）という――．事実，(s_1^3, s_2^2)は完全均衡点ではない．Selten（1975）以後，ナッシュ均衡の精緻化に関する論文は夥しい数に及んだ．現在でも均衡精緻化理論の研究は進められているが，Kohlberg and Mertens（1986）の戦略的安定均衡（strategically stable equilibrium;SSE）で，一つの頂点に達した感がある．脚注17で戦略的安定集合についてごく簡単に述べているが，戦略的安定均衡は，すべてのプレイヤーにこれ以上は考えられないというほどの合理性を要求することによって得られるものである．ゲーム理論の専門家でなければまず理解できない．

一方，プレイヤーに高度な推論能力を仮定しない，いわゆる限定合理性の下での非協力ゲーム理論も1970年代以降に発展する．Maynard-Smith（1982）は，動物の行動が（通常の標準形ゲームとは理論的枠組みが異なるが）ナッシュ均衡戦略になっていることを示したのである．これは，今日では経済学や経営学だけでなく，広く行動科学を専門とする研究者には常識となっている進化的安定戦略（evolutionarily stable strategy;ESS）である――ESSを示した最初の論文は，Maynard-Smith and Price（1973）である．ただし，ESSはナッシュ均衡よりもやや強い条件を課している――．このように，限定合理性の下での非協力ゲーム理論は動物行動の分析が大きな転機となり，1990年代以降になると人間の行動にまで応用されるようになった．いわゆる進化ゲーム理論（evolutionary game theory）と呼ばれるものであり，現在では，動学的分析が取り入れられその手法は幅広い分野で流行している．

戦略的安定均衡（SSE）と進化的安定戦略（ESS）は，異なった観点から導き出された概念

[25] Selten（1975）の完全均衡は，展開形ゲームにおいて定義されたものであり，その原型は，現在では社会科学者なら誰でも知っている部分ゲーム完全均衡（subgame perfect equilibrium;Selten 1965）である．ただし，展開形ゲームは基本的には（非常に煩雑になるが）標準形ゲームに書き換えることができるため（Kuhn 1953），完全均衡の概念は標準形ゲームにも適用できる．展開形ゲームでは，均衡経路（equilibrium path）からはずれた経路が存在することがある．均衡経路からはずれた経路をオフ・パス（off-path）という．ナッシュ均衡ではオフ・パスでのプレイヤーの行動は考慮されない．そこで，オフ・パスにおいても合理的な行動を規定しようというのが完全均衡の考えである．そのことの重要性をSelten（1975）では，もし，「プレイヤーが“わずかな誤り”を犯し均衡経路からはずれた経路に到達したならば」という表現で説得しようとしている．

であるが，密接に関連し合っている（van Damme 1987）．実は，ナッシュ均衡の精緻化理論の端緒になったSelten（1975）による完全均衡も，プレイヤーは“わずかな確率で誤るかもしれない”という人間の合理性をいくらか緩めることによって得られる概念なのである．たとえば，生身の人間である以上，いくら慎重に選択すべきボタンを押そうとしてもたまには間違えて違ったボタンを押してしまう．人間はときどき間違える完全な存在ではないことを考慮して押すべきボタンを考えれば，より完全な結果が得られるだろうというわけである．そのため，ゼルテン流のナッシュ均衡の精緻化は，総じて“震える手の均衡（trembling-hand equilibrium）”と呼ばれる．おそらく，ゼルテン（R.Selten）の発想は生物進化からのアナロジーから得られたものと考えられる．ナッシュによるナッシュ均衡のアイディアから今日に至る非協力ゲームの解概念は，さまざまな異なった視点から得られたものであるが，その根本には一貫性が感じられる．

第3章では，ナッシュ均衡集合の基本的な構造について触れた．さらに細かく分析することにより，非協力標準形ゲームの空間を考え，この空間内にある種の同値関係を導入し，非協力標準形ゲームを類別することが可能になる．そうすれば，さまざまな解概念の関係が明白になり，より簡略で統一的な議論が可能になると思われる．

経済学でよく使われる連続戦略をもつ標準形ゲームのナッシュ均衡点の性質を調べることも重要である．連続戦略とは，プレイヤーの純戦略集合がユークリッド空間の非空，凸かつコンパクトな部分集合で与えられるものである．たとえば，簡単な例としてクールノー型複占モデルなどがある．プレイヤーの利得関数が連続かつ擬凹（quasi-concave）[26]である場合には，本稿の定理2．1とほぼ同じ方法で純戦略でのナッシュ均衡点の存在が証明できる（Glicksberg 1952）．むしろ，Nash（1951）の存在証明は，これの特殊ケースである——Nash（1951）では，期待利得関数は線形である——．さらに，利得関数が連続である場合には（擬凹でなくても），最適反応が擬凹であるという条件の下で混合戦略でのナッシュ均衡点が存在することが証明されている（Glicksberg 1952）．

これまでに述べたナッシュ均衡点が存在するための条件には，利得関数の連続性が仮定されていた．しかし，ホテリングの立地競争モデルのように，経済モデルは，必ずしも利得関数が連続な場合だけとは限らない[27]．利得関数の連続性を必要とせず，弱下半連続（weakly lower semi

[26] X はユークリッド空間の非空な凸部分集合のとき，$f: X \to \mathbf{R}$ が X 上で擬凹であるとは，

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \max\{f(x_1), f(x_2)\}, \quad \forall x_1, \forall x_2 \in X, 0 \leq \forall\lambda \leq 1$$

が成り立つときをいう．

[27] 拙稿（1993）では，利得関数が不連続であるベルトラン型複占モデルの例を示し，その混合戦略でのナッシュ均衡点を具体的に解いている．

-continuous）[28]という条件をおいて，プレイヤーの純戦略集合が閉区間で与えられるゲームに混合戦略でのナッシュ均衡点が存在することを示したのは，Dasgupta and Maskin（1986）である．

進化ゲームあるいは社会ゲームが流行している現在の非協力ゲーム理論研究の中心からは多少はずれた感があるが，ナッシュ均衡集合のより詳細な分析は，非常に複雑でさまざまなバリエーションが考えられている非協力ゲーム理論を統一的視点から見直すのに有用であると思われる．

参考文献

Border, K.C. (1985), *Fixed point theorems with applications to economics and game theory,* Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Chester, Melborne, Sydney.

Dasgupta, P. and E.Maskin (1986), "The existence of equilibrium in discontinuous economic games 1:Theory," *Review of Economic Studies,* 53, pp. 1-26.

Fudenberg, D. and J.Tirole (1992), *Game Theory,* MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Glicksberg, I.L. (1952), "A further generalization of Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points," *Proceedings of the National Academy of Sciences,* 38, pp. 170-174.

Harsanyi, J. and R.Selten (1988), *A General Theory of Equilibrium Selection in Games,* MIT Press,Cambridge, Massachusetts, London, England.

Kohlberg, E. and J-F. Mertens (1986), "On the strategic stability of equilibria," *Econometrica,* 54, pp. 1003-1037.

Kuhn, H.W. (1953), "Extensive Games and the Problem of Information," in *Contributions to the Theory of Games,* 2, Princeton University Press, Princeton, pp. 193-216.

Maynard-Smith, J. (1982), *Evolution and the Theory of Games,* Cambridge University Press, Cambridge.（邦訳：寺本英・梯正之訳『進化とゲーム理論』，産業図書，1985年）

Maynard-Smith, J. and G.R.Price (1973), "The logic of animal conflict," *Nature,* 246, pp. 15-18.

Myerson, R. (1978), "Refinements of the Nash Equilibrium Concept," *International Journal of Game Theory,* 7, pp.73-80.

Myerson, R. (1991), *Game Theory,* Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

Nash, J-F. (1951), "Non-cooperative games," *Annals of Mathematics,* 54, pp. 286-295.

Selten, R. (1975), "Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games," *International Journal of Game Theory,* 4, pp. 25-55.

van Damme, E. (1987), *Stability and Perfection of Nash Equilibria,* Springer-Verlag, Berlin.

Weibull, J.W. (1995), *Evolutionary Game Theory,* MIT Press, Cambridge, Massachusetts.（邦訳：大和瀬達二監訳『進化ゲームの理論』，オフィス・カノウチ，1998年）

28) すべてのプレイヤー i の純戦略集合 S_i はある閉区間とする．したがって，純戦略空間 $S=\times_{i=1}^{n}S_i$（n はプレイヤーの数）は，n 次元ユークリッド空間のコンパクト凸集合である．利得関数 $u_i:S\rightarrow\mathbf{R}$ の不連続点 $s\,(\in S)$ の集合を $S^*(i)$ と表わし，$S_{-i}^*(s_i):=\{s_{-i}\in S_{-i}\,|\,(s_i,s_{-i})\in S^*(i)\}$ と定義する．このとき，$u_i(s)$ が $s_i\in S_i$ において弱下半連続であるとは，

$$\exists\lambda\in[0,1]\ ;\ \lambda\liminf_{s_i\uparrow s_i}u_i(s_i',s_{-i})+(1-\lambda)\liminf_{s_i'\downarrow s_i}u_i(s_i',s_{-i})\geq u_i(s_i',s_{-i}),\quad\forall s_{-i}\in S_{-i}^*(s_i)$$

が成り立つときをいう．詳細は，Dasgupta,P. and E.Maskin（1986）あるいは Fudenberg, D. and J.Tirole（1992）の p. 488を参照．

Wilson, R. (1971), "Computing equilibria of *n*-person games," *SIAM Journal of Applied Mathematics,* 21, pp. 80-87.

岡田章（1996),『ゲーム理論』, 有斐閣.

髙尾健朗（1993),「利得関数の不連続性と均衡の存在について」, 九州共立大学地域経済研究所『九共経済論集』, 第18号, pp. 73-87.

田村一郎（1972),『トポロジー』, 岩波書店.

二階堂副包（1960),『現代経済学の数学的方法』, 岩波書店.

ホフバウアー・シグムント（2001),『進化ゲームと微分方程式』(竹内康博, 佐藤一憲, 宮崎倫子訳), 現代数学社.（原著は, Hofbauer, J. and K.Sigmund (1998), *Evolutionary Games and Population Dynamics,* Cambridge University Press,Cambridge.）

ファン・デル・ヴェルデン, B.L.(1991),『代数幾何学入門』(前田博信訳), シュプリンガー・フェアラーク東京.（原著は, van der Wearden, B.L. (1939), *Einfuhrung in die alegebraiche Geometrie,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York. 邦訳は第二版（1973年）のもの）

松井彰彦（2002),『慣習と規範の経済学』, 東洋経済新報社.

丸山徹（2002),『経済数学』, 知泉書館.