九州産業大学国際文化学部紀要　第8号 185-203（1997）

正規分布およびχ^2分布のBASICによる数値計算

川口俊郎・川上弘泰
九州産業大学国際文化学部 （1997年1月21日受理）

緒　　言

正規分布およびχ^2分布の数値計算用のBASICプログラムを作成した。

正規分布は推計学の基礎となる推定や検定に使用され，自然現象並びに社会現象などの解明に多大の貢献が認められている。

χ^2分布は正規母集団について，母分散の推定と検定，適合度の検定，独立性の検定などの各種の推定や検定に利用されている。

通常，両分布は単独では使用されず，他の推計学の計算プログラム，例えば，一元配置法(1)，二元配置法(2)などに組み込まれる。

ここで報告するパソコン（富士通：F-BASIC 86HGコンパイラ使用）用のBASICプログラムは，推計学処理の副プログラムとして使用することができる。

I．正規分布

1.　正規分布の理論(3),(4)

正規分布の確率密度関数は(1)式で定義され，その平均と分散はそれぞれ(2)式で与えられる。

$$f(x\,;\ m,\ \sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{平　均}:E\ \{x\}\ =m\\ \text{分　散}:V\ \{x\}\ =\sigma^2\end{array}\right\} \tag{2}$$

ここで，uを(3)式のようにおき，(1)式を変形すると，(4)式が導かれる。

$$u=\frac{x-m}{\sigma},\quad du=\frac{dx}{\sigma} \tag{3}$$

$$f(u;0,\ 1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}} \tag{4}$$

(4)式で与えられる確率密度関数の分布は，平均0，分散1の正規分布N（0, 1）で，これを標準正規分布という。

正規分布N（0, 1）の分布関数，あるいはその下側確率である$\phi(u)$ は(5)式で与えられ，これに対する上側確率α は(6)式で算出される。

このときのu値が正規分布の100α%点であり，$u(\alpha)$ またはu_αで表す。さらに，誤差関数 $Erf(x)$ は(7)式で定義される。

$$\phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \tag{5}$$

$$\alpha=1-\phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \tag{6}$$

$$Erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x}e^{-u^2}du \qquad (0\leqq x<\infty) \tag{7}$$

ここで，uを(8)式のようにおき，(7)式を変形すると，(9)式が成立し，(10)式の下側確率$\phi(u)$ と誤差関数 $Erf(x)$ との関係が導かれる。

$$u=\frac{t}{\sqrt{2}},\quad du=\frac{dt}{\sqrt{2}} \tag{8}$$

$$Erf(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\sqrt{2}x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=2\{\phi(\sqrt{2}x)-0.5\} \tag{9}$$

$$\phi(u)=\frac{1}{2}Erf\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)+0.5 \tag{10}$$

1)　正規分布関数の両側確率αの数値計算

正規分布関数の両側確率αの数値計算法は，最初に誤差関数を(11)式の Hastings の最良近似式[5]用いて計算する。つぎに，(10)式の誤差関数と$\phi(u)$ との関係から下側確率$\phi(u)$ を求め，(6)式の上側確率に変換後，これを2倍して両側確率α（2αを新たにαとする）を算出する。

$$Erf(x)=1-(1+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_6\chi^6)^{-16} \tag{11}$$

ここに，$a_1=0.0705231$　　$a_4=0.000152014$

$a_2=0.0422820$　　$a_5=0.000276567$

$a_3=0.00927053$　　$a_6=0.0000430638$

2）正規分布関数の％点のu_α値の数値計算

$\phi(u)$ の逆関数，すなわち，正規分布N（0, 1）の％点のu_α値の数値計算法には，Hastingsの最良近似式[5]，Newton法，三觜のはさみうち法[6]などがある（以下，u_α値をu値と略す)。

(12)式にHastingsの最良近似式を示したが，この計算法では最大0.06％程度の相対誤差が認められた。したがって，実際には，さらに精度の高い，三觜のはさみうち法を採用した。

$$u_\alpha = y - \frac{c_0 + c_1 y + c_2 y^2}{1 + d_1 y + d_2 y^2 + d_3 y^3} \tag{12}$$

ここに，$y = \sqrt{-2\log\alpha}$　$(0 < \alpha \leqq 0.5)$

$$\begin{aligned} c_0 &= 2.515517 & d_1 &= 1.432788 \\ c_1 &= 0.802853 & d_2 &= 0.189269 \\ c_2 &= 0.010328 & d_3 &= 0.001308 \end{aligned}$$

はさみうち法は，正規分布N（0, 1）の両端に近い任意のu値（初期値）を，それぞれx_1とx_2とし，これらに対する下側確率p_1とp_2とを(11)式で求める。

上側確率$\frac{\alpha}{2}$に対する下側確率pを用いて，y_1とy_2をそれぞれ(13)式のようにおくと，(14)式が成立する。求めたいu値をxとおき，(14)式をxについて解くと(15)式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= p_1 - p \\ y_2 &= p_2 - p \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\frac{x_2 - x}{x - x_1} = \frac{y_2}{-y_1} \tag{14}$$

$$x = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1} \tag{15}$$

このxに対する下側確率p_xを求め，(16)式のyを収束値10^{-7}と比較する。以上が1回目の計算である。

$$y = p_x - p \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} &y > 0 \quad x_1 = \text{固定},\ x_2 = \text{可変} \\ &y < 0 \quad x_1 = \text{可変},\ x_2 = \text{固定} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

1回目で収束しない場合は，2回目として(17)式の条件を満足する新たなxを設定し，これに対するp_xを求める。このように，(16)式のyが収束するまで計算を繰り返し，条件を満たすx，すなわちu値を算出する。

2. 正規分布のBASICプログラムの説明

正規分布の両側確率α，およびu値の数値計算を単精度で行う，副プログラムを表1に示す。

表1 正規分布の数値計算の副プログラム

```
 100 REM ;  主プログラム
 110 REM ;  正規分布
 120  CLEAR : CLS : DEFINT I-N : DEFSNG A-H : DEFSNG O-Z
 130 REM ;  u (=CX)値から両側確率α(=AL)を算出
 140  CX=1.960 : GOSUB *NORM : AL=(1!-CP)*2! : PRINT USING "#.###" ; AL
 150 REM ;  両側確率α(=AP1)からu (=AYQ)値を算出
 160  AP1=0.010 : AP=1!-AP1/2! : GOSUB *PNORM : PRINT USING "#.###" ; AYQ
 170  END
1000 REM ;  副プログラム
1010 REM ;  正規分布の下側確率
1020 *NORM
1030  A1=7.05231E-02 : A2=4.22820E-02 : A3=9.27053E-03
1040  A4=1.52014E-04 : A5=2.76567E-04 : A6=4.30638E-05
1050  CY=ABS(CX)/SQR(2!)
1060  CER=1!-(1!+CY*(A1+CY*(A2+CY*(A3+CY*(A4+CY*(A5+CY*A6))))))^(-16)
1070  CQ=.5*CER : IF CX>=0 THEN 1090 ELSE 1080
1080  CP=.5-CQ : GOTO 1100
1090  CP=.5+CQ
1100  RETURN
1110 REM ;  正規分布の%点
1120 *PNORM
1130  KB=1 : BEPS=1E-07 : BX1=-5! : BX2=5!
1140  CX=BX1 : GOSUB *NORM : BY1=CP-AP
1150  CX=BX2 : GOSUB *NORM : BY2=CP-AP
1160  AYQ=(BX1*BY2-BX2*BY1)/(BY2-BY1) : CX=AYQ : GOSUB *NORM : BY=CP-AP
1170  KB=KB+1 : IF KB>=1000 THEN 1240
1180  YEPSABS=ABS(BY)-BEPS : IF YEPSABS<=0 THEN 1240 ELSE 1190
1190  IF BY=0 THEN 1240
1200  IF BY<0 THEN 1220
1210  IF BY>0 THEN 1230
1220  BX1=AYQ : BY1=BY : GOTO 1160
1230  BX2=AYQ : BY2=BY : GOTO 1160
1240  RETURN
```

表1の主プログラムの文番号100～170は，目的に応じて任意に設定できるが，ここでは簡単な形式を例として示した。

さらに，表1の BASIC プログラムの1行の長さは，印刷の都合上短縮して作成したが，実際には1行に255桁まで記入することができる。

1) 副プログラム NORM

副プログラム NORM は正規分布の u 値に対する，(5)式の下側確率 $\phi(u)$ を算出する。両側確率 α への変換は，主プログラムで行う。

(7)式の誤差関数 $Erf(x)$ の数値計算には，(11)式の最良近似式を使用する。

1030～1040：A1～A6 は(11)式で使用される最良近似式の係数である。

1050：CX は入力した u 値，CY は(11)式の x に対応する。

1060：CER は(11)式の誤差関数に対応する。

1070，1090：(10)式に対応する下側確率 CP の算出を行う。CQ は誤差関数 CER の $\frac{1}{2}$ である。

1080：入力値 CX が負の場合の下側確率 CP の算出を行う。

140：この主プログラムで(6)式にしたがい，下側確率 CP を両側確率 AL に変換する。

2) 副プログラム PNORM

副プログラム PNORM は正規分布の両側確率 α に対する％点の u 値を，はさみうち法で算出する。

1130：KB は反復数の初期値，BEPS は収束値 10^{-7}，BX1 と BX2 は正規分布 N (0, 1) で任意に設定した，正規分布の両端に近い左端値と右端値である。

1140：BY1 は BX1 に対する下側確率 CP と，与えられた下側確率 AP との差で，(13)式に対応する。

1150：BY2 は BX2 に対する下側確率 CP と，与えられた下側確率 AP との差で，(13)式に対応する。

1160：AYQ は(15)式の x に対応する。BY は AYQ に対する下側確率 CP と，与えられた下側確率 AP との差で，(16)式に対応する。

1170：反復数の加算値 KB と，計算を終了させる制限値 KB＝1000 の設定を行う。

1180：BY＜＝＞10^{-7} の条件に応じて，収束判定を行う。

1190：BY＝0 なら計算を終了させる。

1200～1230：(17)式の条件で BY が収束するまで，計算を繰り返す。

160：この主プログラムで，AYQ に割り当てられた u 値が得られる。

3. 正規分布表

1) u 値から両側確率 α を求める表

表２に副プログラム NORM を使って算出された，340個のu値に対する両側確率αを示す。

表２ 正規分布表（その１）
（u 値から両側確立 α を求める表）

u	*＝0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0*	1.0000	0.9920	0.9840	0.9761	0.9681	0.9601	0.9522	0.9442	0.9362	0.9283
0.1*	0.9203	0.9124	0.9045	0.8966	0.8887	0.8808	0.8729	0.8650	0.8572	0.8493
0.2*	0.8415	0.8337	0.8259	0.8181	0.8103	0.8026	0.7949	0.7872	0.7795	0.7718
0.3*	0.7642	0.7566	0.7490	0.7414	0.7339	0.7263	0.7188	0.7114	0.7039	0.6965
0.4*	0.6892	0.6818	0.6745	0.6672	0.6599	0.6527	0.6455	0.6384	0.6312	0.6241
0.5*	0.6171	0.6101	0.6031	0.5961	0.5892	0.5823	0.5755	0.5687	0.5619	0.5552
0.6*	0.5485	0.5419	0.5353	0.5287	0.5222	0.5157	0.5093	0.5029	0.4965	0.4902
0.7*	0.4839	0.4777	0.4715	0.4654	0.4593	0.4533	0.4473	0.4413	0.4354	0.4295
0.8*	0.4237	0.4179	0.4122	0.4065	0.4009	0.3953	0.3898	0.3843	0.3789	0.3735
0.9*	0.3681	0.3628	0.3576	0.3524	0.3472	0.3421	0.3371	0.3320	0.3271	0.3222
1.0*	0.3173	0.3125	0.3077	0.3030	0.2983	0.2937	0.2891	0.2846	0.2801	0.2757
1.1*	0.2713	0.2670	0.2627	0.2585	0.2543	0.2501	0.2460	0.2420	0.2380	0.2340
1.2*	0.2301	0.2263	0.2225	0.2187	0.2150	0.2113	0.2077	0.2041	0.2005	0.1971
1.3*	0.1936	0.1902	0.1868	0.1835	0.1802	0.1770	0.1738	0.1707	0.1676	0.1645
1.4*	0.1615	0.1585	0.1556	0.1527	0.1499	0.1471	0.1443	0.1416	0.1389	0.1362
1.5*	0.1336	0.1310	0.1285	0.1260	0.1236	0.1211	0.1188	0.1164	0.1141	0.1118
1.6*	0.1096	0.1074	0.1052	0.1031	0.1010	9.894^{-2}	9.691^{-2}	9.492^{-2}	9.296^{-2}	9.103^{-2}
1.7*	8.913^{-2}	8.727^{-2}	8.543^{-2}	8.363^{-2}	8.186^{-2}	8.012^{-2}	7.841^{-2}	7.673^{-2}	7.508^{-2}	7.345^{-2}
1.8*	7.186^{-2}	7.030^{-2}	6.876^{-2}	6.725^{-2}	6.577^{-2}	6.431^{-2}	6.289^{-2}	6.148^{-2}	6.011^{-2}	5.876^{-2}
1.9*	5.743^{-2}	5.613^{-2}	5.486^{-2}	5.361^{-2}	5.238^{-2}	5.118^{-2}	5.000^{-2}	4.884^{-2}	4.770^{-2}	4.659^{-2}
2.0*	4.550^{-2}	4.443^{-2}	4.338^{-2}	4.236^{-2}	4.135^{-2}	4.036^{-2}	3.940^{-2}	3.845^{-2}	3.753^{-2}	3.662^{-2}
2.1*	3.573^{-2}	3.486^{-2}	3.401^{-2}	3.317^{-2}	3.235^{-2}	3.156^{-2}	3.077^{-2}	3.001^{-2}	2.926^{-2}	2.852^{-2}
2.2*	2.781^{-2}	2.711^{-2}	2.642^{-2}	2.575^{-2}	2.509^{-2}	2.445^{-2}	2.382^{-2}	2.321^{-2}	2.261^{-2}	2.202^{-2}
2.3*	2.145^{-2}	2.089^{-2}	2.034^{-2}	1.981^{-2}	1.928^{-2}	1.877^{-2}	1.827^{-2}	1.779^{-2}	1.731^{-2}	1.685^{-2}
2.4*	1.639^{-2}	1.595^{-2}	1.552^{-2}	1.510^{-2}	1.469^{-2}	1.429^{-2}	1.389^{-2}	1.351^{-2}	1.314^{-2}	1.277^{-2}
2.5*	1.242^{-2}	1.207^{-2}	1.174^{-2}	1.141^{-2}	1.109^{-2}	1.077^{-2}	1.047^{-2}	1.017^{-2}	0.988^{-2}	0.960^{-2}
2.6*	9.322^{-3}	9.054^{-3}	8.793^{-3}	8.538^{-3}	8.290^{-3}	8.049^{-3}	7.814^{-3}	7.585^{-3}	7.362^{-3}	7.145^{-3}
2.7*	6.934^{-3}	6.728^{-3}	6.528^{-3}	6.333^{-3}	6.144^{-3}	5.959^{-3}	5.780^{-3}	5.605^{-3}	5.436^{-3}	5.270^{-3}
2.8*	5.110^{-3}	4.954^{-3}	4.802^{-3}	4.655^{-3}	4.511^{-3}	4.372^{-3}	4.236^{-3}	4.104^{-3}	3.976^{-3}	3.852^{-3}
2.9*	3.731^{-3}	3.614^{-3}	3.500^{-3}	3.389^{-3}	3.282^{-3}	3.178^{-3}	3.076^{-3}	2.978^{-3}	2.882^{-3}	2.790^{-3}
3.0*	2.700^{-3}	2.612^{-3}	2.528^{-3}	2.445^{-3}	2.366^{-3}	2.288^{-3}	2.213^{-3}	2.140^{-3}	2.070^{-3}	2.001^{-3}
3.1*	1.935^{-3}	1.871^{-3}	1.808^{-3}	1.748^{-3}	1.689^{-3}	1.633^{-3}	1.578^{-3}	1.524^{-3}	1.473^{-3}	1.423^{-3}
3.2*	1.374^{-3}	1.327^{-3}	1.282^{-3}	1.238^{-3}	1.195^{-3}	1.154^{-3}	1.114^{-3}	1.076^{-3}	1.038^{-3}	1.002^{-3}
3.3*	9.669^{-4}	9.331^{-4}	9.003^{-4}	8.686^{-4}	8.378^{-4}	8.082^{-4}	7.795^{-4}	7.517^{-4}	7.249^{-4}	6.990^{-4}

表２の表示形式は，縦軸の値 u 値が0.0～3.3の範囲内では0.1刻み，横軸は縦軸の u 値を0.01刻みで増加させて表示する。

両側確率 α の有効桁数を４桁に揃えるために，10％以下の両側確率は指数表示とする。

例えば，9.894^{-2} は 9.894×10^{-2} の省略形である。

2）両側確率αからu値を求める表

表3に副プログラムNORMとPNORMを使って算出した，190個の両側確率α（%）に対するu値を示す。

表3 正規分布表（その2）
（両側確立αからu値を求める表）

α (%)	*=0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1*	3.291	3.264	3.239	3.216	3.195	3.175	3.156	3.138	3.121	3.105
0.2*	3.090	3.076	3.062	3.048	3.036	3.023	3.011	3.000	2.989	2.978
0.3*	2.968	2.958	2.948	2.938	2.929	2.920	2.911	2.903	2.894	2.886
0.4*	2.878	2.870	2.863	2.855	2.848	2.841	2.834	2.827	2.820	2.814
0.5*	2.807	2.801	2.794	2.788	2.782	2.776	2.770	2.765	2.759	2.753
0.6*	2.748	2.742	2.737	2.732	2.727	2.721	2.716	2.711	2.706	2.702
0.7*	2.697	2.692	2.687	2.683	2.678	2.674	2.669	2.665	2.661	2.656
0.8*	2.652	2.648	2.644	2.640	2.636	2.632	2.628	2.624	2.620	2.616
0.9*	2.612	2.608	2.605	2.601	2.597	2.594	2.590	2.586	2.583	2.579
1.*	2.576	2.543	2.512	2.484	2.457	2.432	2.409	2.387	2.366	2.346
2.*	2.326	2.308	2.290	2.273	2.257	2.241	2.226	2.212	2.197	2.183
3.*	2.170	2.157	2.144	2.132	2.120	2.108	2.097	2.086	2.075	2.064
4.*	2.054	2.044	2.034	2.024	2.014	2.005	1.995	1.986	1.977	1.969
5.*	1.960	1.951	1.943	1.935	1,927	1.919	1.911	1.903	1.896	1.888
6.*	1.881	1.873	1.866	1.859	1.852	1.845	1.838	1.832	1.825	1.818
7.*	1.812	1.805	1.799	1.793	1.787	1.780	1.774	1.768	1.762	1.757
8.*	1.751	1.745	1.739	1.734	1.728	1.722	1.717	1.711	1.706	1.701
9.*	1.695	1.690	1.685	1.680	1.675	1.670	1.665	1.660	1.655	1.650
10.*	1.645	1.640	1.635	1.630	1.626	1.621	1.616	1.612	1.607	1.603

表3の表示形式は，縦軸の両側確率αが0.1～1%の範囲内では0.1%刻み，1～10%の範囲内では1%刻みで増加させ，横軸は縦軸の両側確率αが0.1～1%の範囲内では0.01%刻み，1～10%の範囲内では0.1%刻みで増加させて表示する。

4. 考　　察

u値の算出精度に影響を及ぼす，表1の副プログラムPNORMの文番号1130の収束値BEPS，および1170の反復数KBについて，その設定条件を考察する。

BEPS$=10^{-7}$，KB$=1000$と設定した場合，u値を算出するのに必要な反復数を表4に示す。

反復数は表4に示したように，両側確率αが$\alpha \geqq 1.7$%の範囲内では100回以下，$\alpha \leqq 1.6$%の範囲内では100回以上であった。

1）反復数KB$=1000$と設定した場合のu値

両側確率αが$\alpha > 1.0$%の範囲内では，収束値10^{-6}および10^{-7}の両者による，u値

表4 副プログラム PNORM の収束値 10^{-7} に対する反復数

α (%)	・=0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1・	961	875	819	767	722	686	650	627	595	566
0.2・	551	529	509	492	475	460	441	431	417	409
0.3・	397	388	372	369	354	348	340	332	329	321
0.4・	315	306	299	294	292	284	281	277	270	268
0.5・	263	256	252	250	247	242	241	236	233	228
0.6・	225	223	219	219	214	211	209	208	205	200
0.7・	200	198	195	191	189	187	187	186	183	179
0.8・	178	177	175	175	173	171	168	168	167	164
0.9・	163	160	160	158	156	156	155	153	152	151
1.・	150	139	129	121	113	107	102	97	92	89
2.・	85	82	78	75	73	70	68	65	64	62
3.・	61	58	56	56	54	52	52	51	49	47
4.・	47	46	46	44	44	43	41	40	41	39
5.・	39	38	38	36	36	35	35	34	33	34
6.・	33	32	32	31	31	31	29	29	29	29
7.・	28	29	28	27	27	26	26	26	26	25
8.・	24	24	24	24	23	23	23	23	23	23
9.・	21	22	21	21	21	20	20	21	20	19
10.・	20	19	19	19	19	19	18	18	18	18

の差異は認められなかった。

両側確率 α が $\alpha \leqq 1.0$ %の範囲内では，100個の u 値のうち10個の u 値が，収束値 10^{-6} の方が 10^{-7} よりも 0.001 大きく算出された。

2) 反復数 KB＝100 と設定した場合の u 値

両側確率 α が 1) と同じく $\alpha > 1.0$%の範囲内では，収束値 10^{-6} および 10^{-7} の両者ともに，1) と等しい u 値が算出された。

両側確率 α が$\alpha \leqq 1.0$%の範囲内では，収束値 10^{-6} および 10^{-7} の両者に関係なく，反復数が不足のために，1) よりも大きな u 値が算出された。

これらの結果から，両側確率 α が 0.1〜10.9%の範囲内で，正確な u 値を算出するためには，収束値は 10^{-7}，反復数は 1000回の設定が必要である。

ただし，両側確率 α が 1.0%以上であれば，収束値が 10^{-6}，反復数が 100回の設定でも，十分に精度の高い u 値を算出することができる。

また，両側確率 α が $1.1 \leqq \alpha \leqq 1.6$%の範囲内で収束値が 10^{-7} の場合には，反復数は100回以上であるが，この範囲内であれば反復数が100回でも，正確な u 値を算出することができる。

Ⅱ. χ^2 分布

1. χ^2分布の理論[(3),(4)]

自由度ϕのχ^2分布の確率密度関数$f(\chi^2;\phi)$は(1)式で定義され，その平均と分散はそれぞれ(2)式で与えられる。

$$f(\chi^2;\phi)=\frac{1}{2^{\frac{\phi}{2}}\Gamma\left(\frac{\phi}{2}\right)}(\chi^2)^{\frac{\phi}{2}-1}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (\chi^2\geqq 0) \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{平　均}:E\{\chi^2\}=\phi\\ \text{分　散}:V\{\chi^2\}=2\phi\end{array}\right\} \tag{2}$$

χ^2の分布関数，あるいはその下側確率である$F(\chi^2;\phi)$は(3)式で与えられ，これに対する上側確率αは(4)式で算出される。

このときのχ^2値がχ^2分布の100α%点であり，$\chi^2(\phi;\alpha)$またはχ^2_αで表す。

$$F(\chi^2;\phi)=\int_0^{\chi^2}f(u;\phi)\,du \tag{3}$$

$$\alpha=1-F(\chi^2;\phi)=\int_{\chi^2}^{\infty}f(u;\phi)\,du \tag{4}$$

1)　χ^2分布とΓ分布との関係

Γ関数は正の実数μに対して，(5)式で定義され，自由度μのΓ分布の確率密度関数は，(6)式で定義される。Γ分布の平均と分散は，それぞれ(7)式で与えられる。

μとxを(8)式のようにおき，(6)式を変形すると，(9)式のχ^2分布とΓ分布との関係が導かれる。この関係を利用してΓ分布の漸化式を，χ^2分布の数値計算に使用する。

$$\Gamma(\mu)=\int_0^{\infty}x^{\mu-1}e^{-x}\,dx \quad (\mu>0) \tag{5}$$

$$f_{\Gamma}(x;\mu)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}x^{\mu-1}e^{-x} \quad (0\leqq x<\infty,\ \mu>0) \tag{6}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{平　均}:E_{\Gamma}\{x\}=\mu\\ \text{分　散}:V_{\Gamma}\{x\}=\mu\end{array}\right\} \tag{7}$$

$$\mu=\frac{\phi}{2},\ x=\frac{\chi^2}{2} \tag{8}$$

$$f(\chi^2;\phi)\,d(\chi^2)=f_{\Gamma}\left(x;\frac{\phi}{2}\right)dx \tag{9}$$

2)　Γ分布の漸化式

(6)式を0からxまで積分したΓ分布の分布関数を，(10)式のように$I_x(\mu)$とおく。

Γ関数の性質と部分積分から，$I_x(\mu)$の漸化式は(11)式で与えられ，ここで使用した

$U_x(\mu)$ を(12)式に示す。(12)式の$U_x(\mu)$ の形から，この漸化式は(13)式で与えられる。

さらに，$U_x(\mu)$ とχ^2分布の確率密度関数との関係は，(14)式で与えられる。

$$I_x(\mu)=\int_0^x \frac{1}{\Gamma(\mu)} t^{\mu-1} e^{-t} dt \tag{10}$$

$$I_x(\mu+1)=I_x(\mu)-\frac{U_x(\mu)}{\mu} \tag{11}$$

$$U_x(\mu)=\frac{x^{\mu}e^{-x}}{\Gamma(\mu)} \tag{12}$$

$$U_x(\mu+1)=\frac{x}{\mu}U_x(\mu) \tag{13}$$

$$U_x(\mu)=f(\chi^2\,;\,\phi)\,\chi^2 \tag{14}$$

3) χ^2分布関数の上側確率αの数値計算

χ^2分布関数の上側確率αの数値計算法は，最初に4個の初期値（15.1）式～（15.4）式を，自由度ϕの奇数・偶数に応じて計算する。

つぎに，Γ分布の漸化式を利用して，(3)式の下側確率$F(\chi^2\,;\,\phi)$ を計算し，最後に(4)式の関係から上側確率αを算出する。

(a) 自由度ϕが奇数の場合

自由度ϕが奇数の場合の$I_x(\mu)$ と$U_x(\mu)$ の初期値を，（15.1）式と（15.2）式に示す。ただし，（15.1）式はⅠ～(9)式と同じ誤差関数である。

(b) 自由度ϕが偶数の場合

自由度ϕが偶数の場合の$I_x(\mu)$ と$U_x(\mu)$ の初期値を，（15.3）式と（15.4）式に示す。

$$I_x\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{2x}} e^{-\frac{u^2}{2}}du \tag{15.1}$$

$$U_x\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{x}{\pi}}\,e^{-x} \tag{15.2}$$

$$I_x(1)=1-e^{-x} \tag{15.3}$$

$$U_x(1)=x\,e^{-x} \tag{15.4}$$

以上の(11)式から（15.4）式までは，Γ分布についての漸化式の初期値，およびその漸化式である。

これをχ^2分布の数値計算に使用するためには，(8)式のΓ分布からχ^2分布への置換式，および(9)式のχ^2分布とΓ分布との関係などを考慮して，使用しなければならな

い。

4）χ^2分布の%点のχ^2_α値の数値計算

χ^2分布の%点のχ^2_α値の数値計算法として，(4)式を逆に解きχ^2_αをαの関数として導くことはできない（以下，χ^2_α値をχ^2値と略す)。

(a)　自由度ϕが2以下の場合

自由度ϕが1の場合は(16)式，2の場合は(17)式でχ^2値を算出する。ただし，(16)式の$u_{\frac{\alpha}{2}}$は正規分布$N(0,1)$の上側確率$\dfrac{\alpha}{2}$のu値である。

$$\chi^2_\alpha=\begin{cases} u^2_{\frac{\alpha}{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots \phi=1 & (16)\\ -2\log\ \alpha\cdots\cdots\phi=2 & (17)\end{cases}$$

(b)　自由度ϕが3以上の場合

χ^2分布を正規分布で近似して導かれた，(18)式のWilson–Hilferty[3]の正規近似式を用いて初期値を計算し，つぎにNewton法[3],[7]を繰り返して精度を高め，%点のχ^2値を算出する。

$$\tilde{\chi}^2_\alpha=\phi\left\{\left(1-\frac{2}{9\phi}\right)+u_\alpha\sqrt{\frac{2}{9\phi}}\right\}^3 \tag{18}$$

Newton法の公式を(19)式，その収束条件を(20)式に示す。最初の計算では，x_1は(18)式から算出された自由度ϕのχ^2の初期値，$F(x_1)$はx_1から算出された下側確率，Pは与えられた上側確率から算出された下側確率，$f(x_1)$はx_1に対する確率密度関数で(14)式から求められる。

x_1とx_2との関係が(20)式の収束条件を満足しないときは，x_2を新たなx_1として置き換え，収束条件を満足するまでNewton法の計算を繰り返して，χ^2値を算出する。

$$x_{i+1}=x_i-\frac{F(x_i)-P}{f(x_i)}\quad (i=0,\ 1,\ 2,\cdots) \tag{19}$$

$$\left|\frac{x_i-x_{i+1}}{x_{i+1}}\right|<10^{-6} \tag{20}$$

(c)　自由度ϕが100以上の場合

自由度ϕが100を超える場合のχ^2値は，(21)式のFisher[4]の近似式を用いて計算する。

ただし，y_pは上側確率αに対する係数，ϕは自由度である。

$$\chi^2 = \frac{1}{2}\left(y_p + \sqrt{2\phi - 1}\right)^2 \tag{21}$$

2. χ^2分布のBASICプログラムの説明

χ^2分布の上側確率α，およびχ^2値の数値計算を単精度で行うための流れ図を図1に，その副プログラムを表5に示す。

ただし，χ^2分布の数値計算には，正規分布の両側確率α，およびu値を使用するから，表5の文番号1280以下は文番号のみが異なる表1である。

また，表5の1行の桁数は，表1の正規分布のBASICプログラムと同じく，印刷の都合上短縮して作成した。

入 力 ： 自由度ϕ， χ^2値

⇩

副プログラム ： CHI 2

初期値 ： 自由度ϕ＝奇数

$$I_x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{2x}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

正規分布副プログラム ： NORM

$$U_x\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\,e^{-x}$$

初期値 ： 自由度ϕ＝偶数

$$I_x(1) = 1 - e^{-x}$$

$$U_x(1) = x\,e^{-x}$$

漸化式 ：

$$I_x(\mu+1) = I_x(\mu) - \frac{U_x(\mu)}{\mu}$$

$$U_x(\mu+1) = \frac{x}{\mu}\,U_x(\mu)$$

⇩

出 力 ： 上側確率α

入 力 ： 自由度ϕ， 上側確率α

⇩

副プログラム ： PCHI 2

自由度$\phi = 1$ ： $\chi^2_\alpha = u_{\frac{\alpha}{2}}^{\,2}$

正規分布副プログラム ： PNORM

自由度$\phi = 2$ ： $\chi^2_\alpha = -2\log\alpha$

自由度$\phi \geqq 3$ ： 初期値（正規近似式）

$$\widetilde{\chi}^2_\alpha = \phi\left\{\left(1 - \frac{2}{9\phi}\right) + u_\alpha\sqrt{\frac{2}{9\phi}}\right\}^3$$

正規分布副プログラム ： PNORM

Newton法

$$\left|\frac{\mathrm{HCV} - \mathrm{HXX}}{\mathrm{HXX}}\right| < 10^{-6}$$

HCV：算出前のχ^2値
HXX：算出後のχ^2値

⇩

出 力 ： χ^2値

図1 χ^2分布の数値計算の流れ図

表5　χ^2分布の数値計算の副プログラム

```
 100 REM ;  主プログラム
 110 REM ;  χ² 分布
 120  CLEAR : CLS : DEFINT I-N : DEFSNG A-H : DEFSNG O-Z
 130 REM ;  自由度φ(=NH)とχ²(=HCV)値から，上側確率α(=AL)を算出
 140  NH=10 : HCV=18.31 : GOSUB *CHI2 : AL=1!-HP : PRINT USING "#.###" ; AL
 150 REM ;  自由度φ(=NH)と上側確率α(=HP) から，χ²(=HXX)値を算出
 160  NH=10 : HP=0.010 : GOSUB *PCHI2 : PRINT USING "##.##" ; HXX
 170  END
1000 REM ;  副プログラム
1010 REM ;  χ²分布の下側確率
1020 *CHI2
1030  HPIS=SQR(3.14159) : HX=HCV/2! : CX=SQR(HCV)
1040  IF NH MOD 2 = 0 THEN 1070
1050  GOSUB *NORM : HP=2!*(CP-.5) : IAI=1
1060  HU=SQR(HX)*EXP(-HX)/HPIS : GOTO 1080
1070  HP=1!-EXP(-HX) : HU=HX*EXP(-HX) : IAI=2
1080  IF IAI=NH THEN 1120
1090  FOR IAJ=IAI TO NH-2 STEP 2
1100    A=CSNG(IAJ) : HP=HP-2!*HU/A : HU=HCV*HU/A
1110  NEXT IAJ
1120  HD=HU/HCV
1130  RETURN
1140 REM ;  χ²分布の％点
1150 *PCHI2
1160  IF NH=1 THEN 1250
1170  IF NH=2 THEN 1260
1180  DFR=CSNG(NH) : AP=1!-HP : GOSUB *PNORM
1190  HW=2!/(9!*DFR) : HCV=DFR*(1!-HW+AYQ*SQR(HW)) ^ 3
1200  KH=1
1210  GOSUB *CHI2 : HXX=HCV-(HP-AP)/HD
1220  IF ABS(HCV-HXX)<.000001*ABS(HXX) THEN 1270
1230  KH=KH+1 : IF KH>=30 THEN 1270
1240  HCV=HXX : GOTO 1210
1250  AP=1!-HP/2! : GOSUB *PNORM : HXX=AYQ*AYQ : GOTO 1270
1260  HXX=-2!*LOG(HP) : GOTO 1270
1270  RETURN
1280 REM ;  正規分布の下側確率
1290 *NORM
1300  A1=7.05231E-02 : A2=4.22820E-02 : A3=9.27053E-03
1310  A4=1.52014E-04 : A5=2.76567E-04 : A6=4.30638E-05
1320  CY=ABS(CX)/SQR(2!)
1330  CER=1!-(1!+CY*(A1+CY*(A2+CY*(A3+CY*(A4+CY*(A5+CY*A6)))))) ^ (-16)
1340  CQ=.5*CER : IF CX>=0 THEN 1360 ELSE 1350
1350  CP=.5-CQ : GOTO 1370
1360  CP=.5+CQ
1370  RETURN
1380 REM ;  正規分布の％点
1390 *PNORM
1400  KB=1 : BEPS=1E-07 : BX1=-5! : BX2=5!
1410  CX=BX1 : GOSUB *NORM : BY1=CP-AP
1420  CX=BX2 : GOSUB *NORM : BY2=CP-AP
1430  AYQ=(BX1*BY2-BX2*BY1)/(BY2-BY1) : CX=AYQ : GOSUB *NORM : BY=CP-AP
1440  KB=KB+1 : IF KB>1000 THEN 1510
1450  YEPSABS=ABS(BY)-BEPS : IF YEPSABS<=0 THEN 1510 ELSE 1460
1460  IF BY=0 THEN 1510
1470  IF BY<0 THEN 1490
1480  IF BY>0 THEN 1500
1490  BX1=AYQ : BY1=BY : GOTO 1430
1500  BX2=AYQ : BY2=BY : GOTO 1430
1510  RETURN
```

表5の主プログラムの文番号100～170は，正規分布の場合と同じく，目的に応じて任意に設定できるが，ここでは簡単な形式を例として示した。

1) 副プログラム CHI 2

図1の流れ図の副プログラム CHI 2 は，自由度 ϕ の χ^2 分布の χ^2 値に対する，(3)式の下側確率 $F(\chi^2;\phi)$ を算出する。上側確率 α への変換は，主プログラムで行う。

ただし，図1の CHI 2 の漸化式の初期値，およびその漸化式は Γ 分布形式で表示されている。

この数値計算には，図1に示したように自由度 ϕ の奇数・偶数に応じた初期値を選択し，(8)式と(9)式とを考慮して Γ 分布の漸化式を使用し，(3)式の下側確率 $F(\chi^2;\phi)$ を算出する。

1030：HPIS は $\sqrt{\pi}$，HCV は入力した χ^2 値，HX は $\frac{\chi^2}{2}$，CX は $\sqrt{\chi^2}$ などで，計算に使用される数値を設定する。

1040：自由度 ϕ を NH で表し，その奇数・偶数の判定を行い，それに応じて分岐する。

1050：自由度が奇数の場合である。(15.1) 式は誤差関数であるから，正規分布の副プログラム NORM を用いて，CX に対する下側確率 CP を計算し，I ～(9)式から誤差関数 HP を求める。この HP が $I_x(\mu)$ の漸化式の初期値 (15.1) 式の $I_x\left(\frac{1}{2}\right)$である。さらに，自由度が奇数の場合の基準値を設定する。

1060：自由度が奇数の場合で，HU は$U_x(\mu)$ の漸化式の初期値 (15.2) 式の $U_x\left(\frac{1}{2}\right)$を表す。HU を計算後，1080に分岐する。

1070：自由度が偶数の場合で，HP は (15.3) 式の $I_x(1)$，HU は (15.4) 式の $U_x(1)$を表す。さらに，自由度が偶数の場合の基準値を設定する。

1080：自由度 $\phi \leqq 2$ の場合は1120に分岐し，確率密度関数を計算する。

1090～1110：漸化式を計算する際の反復数を設定し，この漸化式を計算する。

1100：$I_x(\mu)$ の漸化式の計算を(11)式，$U_x(\mu)$ の漸化式の計算を(13)式で行う。HP と HU はそれぞれ，$I_x(\mu)$ と$U_x(\mu)$ を表す。

1120：HD は(1)式で示した，χ^2 分布の確率密度関数 $f(\chi^2;\phi)$ を表し，これと $U_x(\mu)$ との関係は(14)式で与えられる。

140：この主プログラムで(4)式にしたがい，下側確率 HP を上側確率 AL に変換する。

2) 副プログラム PCHI 2

副プログラム PCHI 2 は，自由度 ϕ の χ^2 分布の上側確率 α に対する，％点の χ^2 値を算出する。

図1に示したように，χ^2 値の数値計算は自由度が $\phi=1$ の場合には(16)式，自由度が

$\phi=2$の場合には(17)式で行う。

自由度が$\phi\geqq 3$の場合には(18)式の初期値を用い，Newton法を繰り返してχ^2値を算出する。

1160：自由度NHが1の場合には，1250に分岐する。

1170：自由度NHが2の場合には，1260に分岐する。

1180：(18)式のNewton法の初期値の算出に必要な，上側確率HPから求めた下側確率APに対するu値を，正規分布の副プログラムPNORMを使用して計算する。

1190：HCVはNewton法の初期値で，(18)式にしたがい計算する。

1210～1240：Newton法の計算を(18)式～(20)式にしたがい行う。

1210：HXXは(19)式のx_{i+1}に対応する。HPは副プログラムCHI 2で算出したHCVに対する下側確率，APは与えられた上側確率HPを変換した下側確率，HDは副プログラムCHI 2の1120で求めた(14)式の確率密度関数である。

1220：収束値を10^{-6}と設定し，(20)式に対応する収束判定を行う。

1230：反復数KHの加算と，反復回数を30回と設定し，これを超えた場合は計算を終了させる。

1240：収束しない場合は使用したHXXをHCVに移し，新たにHXXを設定し，収束するまでNewton法を繰り返す。

1250：自由度NHが1の場合の計算を，(16)式にしたがって行う。ここで使用する上側確率αのχ^2値に対する$u_{\frac{\alpha}{2}}$は，正規分布の両側確率αのu値と等価である。

1260：自由度NHが2の場合の計算を，(17)式にしたがって行う。

3. χ^2分布表

表6は表5のχ^2分布の数値計算用のBASIC副プログラムを使って，自由度ϕと上側確率αから算出されたχ^2値である。

表6の表示形式は，縦軸に自由度ϕ，横軸に上側確率αをとる。

自由度が$\phi=1$～30の範囲内では1刻み，$\phi=30$～100の範囲内では10刻みで，自由度ϕを増加させて表示する。上側確率αは13個を設定し，その範囲は$\alpha=0.995$～0.005である。

表6の最後に自由度ϕが100以上の場合に使用される，(21)式のFisherの近似式に必要な係数y_pを掲示する。

表6 χ^2 分 布 表
（自由度 ϕ と上側確率 α から χ^2 を求める表）

ϕ \ α	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.750	0.500	0.250	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.393^{-4}	0.157^{-3}	0.982^{-3}	0.393^{-2}	0.0158	0.102	0.455	1.323	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	0.575	1.386	2.773	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	1.213	2.366	4.108	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	1.923	3.357	5.385	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	2.675	4.351	6.626	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.03	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.36	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34	17.12	21.06	23.68	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.31	25.00	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.79	16.34	20.49	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	13.68	17.34	21.60	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34	22.72	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	15.45	19.34	23.83	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.34	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	49.3	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	71.1	79.3	88.1	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	80.6	89.3	98.6	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	90.1	99.3	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2
y_p	−2.58	−2.33	−1.96	−1.64	−1.28	−0.674	0.000	0.674	1.282	1.645	1.960	2.33	2.58

4. 考　　察

χ^2 値の算出精度に影響を及ぼす，表5のはさみうち法の副プログラム PNORM の文番号1400の収束値 BEPS，および1440の反復数 KB，並びに Newton 法の副プログラム PCHI 2 の1230の反復数 KH などについて，その設定条件を考察する。

χ^2値の算出に必要な正規分布のu値は，自由度ϕが1の場合には，(16)式で使用され，自由度ϕが3以上の場合には，(18)式の Newton 法の初期値の計算で使用される。

1)　自由度ϕが1の場合に使用されるu値

自由度ϕが1の場合のχ^2値の算出には，正規分布の考察 4.～1）で述べたように，両側確率αが$\alpha \leqq 1.0\%$の範囲内では，副プログラム PNORM の収束値は BEPS＝10^{-7}，反復数は KB＝1000 と設定しなければならない。

2)　自由度ϕが3以上の場合に使用されるu値

自由度ϕが3以上の場合のχ^2値の算出には，Newton 法を使用する。

この初期値には，設定した上側確率αに対するu値が必要で，その算出には反復数 KB を少なくし，計算時間を短縮することが望ましい。ただし，このu値の算出には，χ^2分布の自由度ϕは関係しない。

したがって，収束値と反復数の関係を調べ，これを表7に示す。表7では特に，収束値10^{-7}と2.8×10^{-5}の場合のみは，u値も合わせて掲示した。

表7　副プログラム PNORM の収束値と反復数の関係

確率 / 収束値	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.750	0.500	0.250	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
10^{-7}	148	83	38	19	9	＞1000	2	＞1000	10	19	39	85	150
u 値	-2.576	-2.326	-1.960	-1.645	-1.282	-0.674	0.0	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576
2.3×10^{-7}	141	80	37	19	9	＞1000	2	＞1000	9	19	37	81	142
2.4×10^{-7}	140	80	36	19	9	7	2	7	9	19	36	79	139
10^{-6}	128	73	34	18	9	6	2	6	9	18	34	73	128
2.7×10^{-5}	100	58	28	15	8	6	2	6	8	15	28	58	100
2.8×10^{-5}	99	58	28	15	8	6	2	6	8	15	28	58	99
u 値	-2.578	-2.327	-1.960	-1.645	-1.282	-0.674	0.0	0.674	1.282	1.645	1.960	2.327	2.578

表7に示したように，反復数が100未満になる収束値は2.8×10^{-5}であった。10^{-7}と2.8×10^{-5}の両収束値について，α＝0.995，0.990，0.005，0.001 などのu値を比較すると，最大相対誤差は0.074％で，収束値が2.8×10^{-5}のu値の方が大きく算出された。

α＝0.975～0.025 の範囲内の収束値について算出されたχ^2値は一致し，計算時間も収束値が2.8×10^{-5}の方が短縮された。

ただし，副プログラム PCHI 2 の反復数 KH は，収束値が2.8×10^{-5}の方が僅かに増加した。

以上の理由から，自由度が3以上のχ^2値の算出には，収束値は BEPS＝2.8×10^{-5}，

反復数は KB＝100 の設定で十分である。

3） 副プログラム PCHI 2 の反復数

Newton 法の副プログラム PCHI 2 の文番号1220では収束値を 10^{-6}，文番号1230では反復数を KH＝30 と設定した。

この条件のもとで，副プログラム PNORM の収束値 BEPS＝10^{-7}，反復数 KB＝1000 に対する，副プログラム PCHI 2 で算出された反復数 KH を表 8 に示す。

表 8 副プログラム PCHI 2 の収束値 10^{-6} に対する反復数

ϕ ＼ α	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.750	0.500	0.250	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
3	30	10	30	3	15	4	3	3	3	3	3	4	4
4	4	30	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
5	30	6	7	7	2	3	3	3	3	3	3	4	4
6	4	4	3	3	2	3	3	3	3	3	2	3	4
7	16	4	5	30	2	3	2	3	3	3	2	3	3
8	9	4	3	3	2	3	2	3	3	3	2	3	3
9	5	6	7	4	2	3	2	3	3	3	2	4	4
10	3	6	3	3	2	3	2	2	3	3	2	3	5
11	5	7	5	3	2	2	2	2	3	3	2	3	4
12	3	6	3	3	2	2	2	2	3	3	2	3	4
13	30	6	3	3	2	2	2	2	3	3	2	3	3
14	5	3	3	2	2	2	2	2	3	2	2	3	5
15	4	5	3	2	2	2	2	2	3	2	2	4	3
16	4	3	3	2	2	2	2	2	3	2	2	3	30
17	8	3	3	3	2	2	2	2	3	2	2	4	3
18	7	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	3	30
19	4	5	3	2	2	2	2	2	2	2	2	3	4
20	4	5	3	2	2	2	2	2	2	2	2	3	4
21	8	30	3	3	2	2	2	2	2	2	2	3	3
22	3	3	4	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3
23	4	5	3	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3
24	30	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3
25	30	5	3	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3
26	4	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	30	3
27	30	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
28	3	4	3	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3
29	8	4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3
30	7	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
40	8	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
50	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
60	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
70	4	5	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
80	4	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
90	6	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
100	6	7	3	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2

表 8 に示したように，反復数が30回以上となる χ^2 値は13個算出され，その収束値の範囲は 6.8×10^{-5}～1.0×10^{-6} であった。ただし，この収束値の範囲内では，算出された χ^2 値と文献値との差異は認められなかった。

これらは上側確率 α の両端 0.995 と 0.005 の領域に多く算出され，その他の α に対

する反復数は2〜3回程度であった。

収束値がBEPS＝2.8×10^{-5}，反復数がKB＝100の2）で述べた設定条件では，算出される反復数は，表8の反復数よりも僅かに増加した。

結　　語

正規分布およびχ^2分布の数値計算を行う，BASICプログラムを作成した。

正規分布については，表2で示した範囲内の任意のu値に対する両側確率α，および表3で示した範囲内の任意の両側確率α（%）に対するu値を算出できる。

χ^2分布については，表6で示した範囲内の任意の上側確率αと自由度ϕに対するχ^2値，および任意の自由度ϕとχ^2値に対する上側確率αを算出できる。

推計学を用いて正規分布およびχ^2分布の検定を行う場合には，副プログラムPNORMの収束値BEPS＝10^{-7}，反復数KB＝1000と設定する。

χ^2分布表の作成の場合には，自由度に応じて収束値と反復数の設定を変化させる。

自由度が1の場合には，収束値BEPS＝10^{-7}，反復数KB＝1000，自由度が3以上の場合には，収束値BEPS＝2.8×10^{-5}，反復数KB＝100と設定し，計算時間を短縮することができる。

参　考　文　献

(1) 川上弘泰：一元配置法のBASICプログラム，九州産業大学国際文化学部紀要，第3号，117–130，1995.

(2) 川上弘泰：二元配置法のBASICプログラム，九州産業大学国際文化学部紀要，第4号，123–135，1995.

(3) 大村　平，今田直孝：推測統計のFORTRAN，16–17，24–39，オーム社，1972.

(4) 近藤良夫，舟阪　渡：技術者のための統計的方法，22–26，53–58，66，631，633，共立出版，1971.

(5) Hastings, C.: Approximations for Digital Computers, Princeton Univ. Press 1955.

(6) 三觜　武：統計計算入門，オーム社，1970.

(7) N. R. Draper, H. Smith，中村慶一訳：応用回帰分析，274–277，森北出版，1973.