九州産業大学国際文化学部紀要　第9号 151—166（1997）

F分布のBASICによる数値計算

川口俊郎・川上弘泰

九州産業大学国際文化学部 （1997年5月21日受理）

緒　　言

F分布の数値計算用のBASICプログラムを作成した。その内容は,

(1)　任意の自由度 ϕ_1 と自由度 ϕ_2，および F_α 値に対する上側確率 α の算出。

(2)　任意の自由度 ϕ_1 と自由度 ϕ_2，および上側確率 α に対する F_α 値の算出。

などである。

F 分布は二つの正規母集団の母分散の比の推定や検定，二項母集団に関する区間推定や検定，分散分析法の F 検定など，推計学では多岐にわたって利用されている。

ここで報告するパソコン（富士通：F-BASIC 86 HG コンパイラ使用）用の BASIC プログラムは，推計学処理の副プログラムとして，容易に主プログラムに組み込むことができる。

1．F 分布[(1),(2)]

χ_1^2が自由度 ϕ_1 の χ^2 分布に従い，χ_2^2が自由度 ϕ_2 の χ^2 分布に従い，さらに χ_1^2 と χ_2^2 が互いに独立であるとき，(1)式の変数 F は，自由度（ϕ_1，ϕ_2）の F 分布に従う。

F 分布の確率密度関数は(2)式で定義され，その平均と分散は，それぞれ(3)式で与えられる。ただし，B は β 関数を表す。

F 分布の分布関数，あるいはその下側確率 $P(F\,;\,\phi_1,\ \phi_2)$ は(4)式で定義され，これに対する上側確率 α は(5)式で算出される。

このときのF値が，F 分布の100α％点であり，$F(\phi_1,\ \phi_2\,;\,\alpha)$ またはF_α（以下，F 値と略す）で表す。

2．F分布と χ^2 分布との関係

一般に F 分布表には，50％点以下の F 値しか記載されていない。50％点以上の F 値は，(6)式の関係から算出することができる。

F 分布と χ^2 分布との関係は，(7)式と(8)式で与えられ，$\phi_2=\infty$ の場合は(7)式，$\phi_1=\infty$ の場合は(8)式を使用して，F 値の算出を行う。ただし，(8)式は(6)式および(7)式から導かれる。

$$F=\frac{\chi_1^2}{\phi_1}\Big/\frac{\chi_2^2}{\phi_2} \tag{1}$$

$$f(F;\phi_1,\ \phi_2)=\frac{\phi_1^{\frac{\phi_1}{2}}\phi_2^{\frac{\phi_2}{2}}F^{\frac{\phi_1}{2}-1}}{B(\frac{\phi_1}{2},\frac{\phi_2}{2})}(\phi_2+\phi_1F)^{-\frac{\phi_1+\phi_2}{2}} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{平　均}：E\{F\}=\frac{\phi_2}{\phi_2-2} &&\cdots\ \phi_2>2\\ &\text{分　散}：V\{F\}=\frac{2\phi_2^2(\phi_1+\phi_2-2)}{\phi_1(\phi_2-2)^2(\phi_2-4)} &&\cdots\ \phi_2>4\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$P(F;\phi_1,\ \phi_2)=\int_0^F f(F;\phi_1,\ \phi_2)dF \tag{4}$$

$$\alpha=1-P(F;\phi_1,\ \phi_2)=\int_F^\infty f(F;\phi_1,\ \phi_2)dF \tag{5}$$

$$F(\phi_1,\ \phi_2;\alpha)=\frac{1}{F(\phi_2,\phi_1;1-\alpha)} \tag{6}$$

$$F(\phi,\infty;\alpha)=\frac{\chi^2(\phi;\alpha)}{\phi} \tag{7}$$

$$F(\infty,\phi;\alpha)=\frac{1}{F(\phi,\infty;1-\alpha)}=\frac{\phi}{\chi^2(\phi;1-\alpha)} \tag{8}$$

3．F 分布と β 分布との関係

β 関数は(9)式で定義され，β 分布の確率密度関数は，(10)式で定義される。β 分布の平均と分散は，それぞれ(11)式で与えられる。

β 分布の μ と ν および x を(12)式のようにおき，(10)式を変形すると，(13)式の F 分布と β 分布との確率密度関数の関係が得られる。

この関係を利用して β 分布の漸化式を，F 分布の数値計算に利用することができる。

$$B(\mu,\nu)=\int_0^1 x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx\quad(\mu>0,\nu>0) \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}&f_B(x;\mu,\nu)=\frac{1}{B(\mu,\nu)}\quad x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}\\ &(0<x<1,\mu>0,\nu>0)\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{平　均：}E_B\{x\}=\frac{\mu}{\mu+\nu} \\ &\text{分　散：}V_B\{x\}=\frac{\mu\nu}{(\mu+\nu)^2(\mu+\nu+1)} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mu=\frac{\phi_1}{2},\quad \nu=\frac{\phi_2}{2} \\ &x=\frac{\phi_1 F}{\phi_2+\phi_1 F},\quad dx=\frac{\phi_1\phi_2}{(\phi_1 F+\phi_2)^2}dF \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$f(F\,;\,\phi_1,\ \phi_2)dF=f_B(x;\frac{\phi_1}{2},\frac{\phi_2}{2})dx \tag{13}$$

4．β分布の漸化式

(10)式を0からxまで積分した，β分布の分布関数を（14．1）式で表せば，このI_xの漸化式として（14．2）式，および（14．3）式が導かれる。

ここで使われたU_xは（15．1）式で表され，（15．1）式の形からU_xの漸化式として（15．2）式，および（15．3）式が導かれる。

5．β関数とΓ関数との関係

β関数とΓ関数との関係は，(16)式で与えられる。この(16)式を利用してβ関数は，Γ関数から計算することができる。

ただし，これらの（14．1）式～(16)式をF分布の数値計算に適用するためには，(12)式の変換が必要である。

$$\left.\begin{aligned} &I_x(\mu,\nu)=\int_0^x\frac{1}{B(\mu,\nu)}\quad x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1}dx \\ &\qquad\qquad (0\leqq x\leqq 1,\ \mu>0,\ \nu>0) \end{aligned}\right\} \tag{14. 1}$$

$$I_x(\mu+1,\nu)=I_x(\mu,\nu)-\frac{1}{\mu}U_x(\mu,\nu) \tag{14. 2}$$

$$I_x(\mu,\nu+1)=I_x(\mu,\nu)+\frac{1}{\nu}U_x(\mu,\nu) \tag{14. 3}$$

$$U_x(\mu,\nu)=\frac{1}{B(\mu,\nu)}x^{\mu}(1-x)^{\nu} \tag{15. 1}$$

$$U_x(\mu+1,\nu)=U_x(\mu,\nu)\frac{\mu+\nu}{\mu}x \tag{15. 2}$$

$$U_x(\mu,\nu+1)=U_x(\mu,\nu)\frac{\mu+\nu}{\nu}(1-x) \tag{15. 3}$$

$$B(\mu, \nu)=\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} \quad (\mu>0, \nu>0) \tag{16}$$

6．Γ関数の数値計算

(16)式を利用して，β分布の数値計算を行うためには，Γ関数の数値計算式が必要である。これに使用する計算式は，xの範囲により(17)式と(20)式の2種類に分類される。

1）$1.5 \leqq x \leqq 2.5$の場合

xがこの範囲の場合は，(17)式のΓ関数の最良近似式を使用する。

ただし，これは実質的なxの範囲で，(17)式の$\Gamma(2+x)$から明らかなように，理論的なxの範囲は$-0.5 \leqq x \leqq 0.5$である。

2）$x<1.5$または$2.5<x \leqq 5.0$の場合

xの範囲が$x<1.5$の場合は，Γ関数の部分積分から導かれた(18)式の漸化式を用いて，xを1）の範囲に誘導後，(17)式を使用する。

xの範囲が$2.5<x \leqq 5.0$の場合は，(19)式の漸化式を用いて，xを1）の範囲に誘導後，(17)式を用する。

3）$x>5$の場合

xがこの範囲の場合は，(20)式のΓ関数の漸近展開式を使用する。

$$\Gamma(2+x) \fallingdotseq \sum_{i=0}^{8} a_i x_i \quad (-0.5 \leqq x \leqq 0.5) \tag{17}$$

ここに，$a_0=0.999999$　　$a_5=-0.000125138$

$a_1=0.422785$　　$a_6=\ \ 0.0122996$

$a_2=0.411850$　　$a_7=-0.00349613$

$a_3=0.0815652$　　$a_8=\ \ 0.00213858$

$a_4=0.0740649$

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x} \tag{18}$$

$$\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1) \tag{19}$$

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}} \{1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3} -\frac{571}{2488320x^4}+\frac{163879}{209018880x^5}+\frac{5246819}{75246796800x^6} -\frac{534703531}{902961561600x^7}+\cdot\cdot\cdot\} \quad (x\to\infty) \tag{20}$$

7．F分布関数の上側確率 α の数値計算

F 分布関数の上側確率 α の数値計算法は，最初に８個の初期値(21．1)式～(24．2)式を，自由度ϕ_1と自由度ϕ_2の奇数・偶数の組み合わせに応じて算出する。

つぎに，β 分布の漸化式（14．2）式と（14．3）式，および（15．2）式と（15．3）式を利用して，(4)式の下側確率 $P(F\,;\,\phi_1,\ \phi_2)$ を計算し，最後に(5)式の関係から上側確率 α を算出する。

１）自由度（ϕ_1，ϕ_2）＝（奇数，奇数）の場合

この場合の I_x の初期値は（21．1）式，U_xの初期値は（21．2）式を使う。

２）自由度（ϕ_1，ϕ_2）＝（奇数，偶数）の場合

この場合の I_x の初期値は（22．1）式，U_x の初期値は（22．2）式を使う。

３）自由度（ϕ_1，ϕ_2）＝（偶数，奇数）の場合

この場合の I_x の初期値は（23．1）式，U_x の初期値は（23．2）式を使う。

４）自由度（ϕ_1，ϕ_2）＝（偶数，偶数）の場合

この場合の I_x の初期値は（24．1）式，U_x の初期値は（24．2）式を使う。

ただし，ここで示した初期値の x は，(12)式を使って F 分布の初期値に変換して使用しなければならない。

また，U_x と F 分布の確率密度関数との関係は，(25)式で与えられる。

$$I_x\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1-\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{x}} \tag{21.1}$$

$$U_x\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\sqrt{x(1-x)} \tag{21.2}$$

$$I_x\left(\frac{1}{2},1\right)=\sqrt{x} \tag{22.1}$$

$$U_x\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{1}{2}\sqrt{x}(1-x) \tag{22.2}$$

$$I_x\left(1,\frac{1}{2}\right)=1-\sqrt{1-x} \tag{23.1}$$

$$U_x\left(1,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x} \tag{23.2}$$

$$I_x(1,1)=x \tag{24.1}$$

$$U_x(1,1)=x(1-x) \tag{24.2}$$

$$U_x\left(\frac{\phi_1}{2},\frac{\phi_2}{2}\right)=f(F;\phi_1,\ \phi_2)F \tag{25}$$

8．F分布の%点のF値の数値計算

F 分布の%点のF値の数値計算法として，(5)式を逆に解きF_αを α の関数として，導くことはできない。

この数値計算で使用する，Newton 法の第１近似値は，条件が(26)式の場合には，(27)式の Paulson の近似式から求め，条件が(29)式の場合には，(30)式から算出する。

(26)式の条件が必要な理由は，(28)式の範囲内では(26)式は使用できないから，これを避けるためである。

Newton 法の公式およびその収束条件を，(31)式および(32)式に示す。最初の x_1 は(27)式または(30)式から算出された，自由度 ϕ_1 と自由度 ϕ_2，および上側確率 α に対する，F値の第１近似値である。

$F(x_1)$は x_1 から算出された下側確率，P は与えられた上側確率から算出された下側確率，$f(x_1)$は x_1 に対する確率密度で(25)式から求められる。

x_1 と x_2 との関係が(32)式の収束条件を満足しないときは，x_2 を新たな x_1 として置きかえ，収束条件を満足するまで Newton 法の計算を繰り返して精度を高め，F値を算出する。

$$(1-b)^2-bu_\alpha{}^2>0.8 \tag{26}$$

$$\widetilde{F}_\alpha=\left\{\frac{(1-a)(1-b)+u_\alpha\sqrt{(1-a)^2b+(1-b)^2a-abu_\alpha{}^2}}{(1-b)^2-bu_\alpha{}^2}\right\}^3 \tag{27}$$

ここに，$a=\dfrac{2}{9\phi_1}$, $b=\dfrac{2}{9\phi_2}$，u_α; $N(0,1)$の100α%点

$$u_\alpha\geqq\sqrt{\frac{(1-b)^2}{b}}=\sqrt{\frac{9\phi_2}{2}-2+\frac{2}{9\phi_2}} \tag{28}$$

$$(1-b)^2-bu_\alpha{}^2\leqq 0.8 \tag{29}$$

$$\widehat{F}_\alpha=\left\{\frac{1}{B(\frac{\phi_1}{2},\frac{\phi_2}{2})}\,\frac{2\phi_2{}^{\frac{\phi_2}{2}-1}}{\phi_1{}^{\frac{\phi_2}{2}}}\,\frac{1}{\alpha}\right\}^{\frac{2}{\phi_2}} \tag{30}$$

$$x_{i+1}=x_i-\frac{F(x_1)-P}{f(x_i)}\quad(i=0,1,2,\cdot\cdot\cdot) \tag{31}$$

$$\left|\frac{x_i-x_{i+1}}{x_{i+1}}\right|<10^{-6} \tag{32}$$

表 1　*F* 分布の数値計算の副プログラム

```
 100 REM ; 主プログラム
 110  CLEAR : CLS : DEFINT I-N : DEFSNG A-H : DEFSNG O-Z
 120  API=3.14159
 130 REM ; 自由度  , 自由度  , F 値 から上側確率αを算出
 140  FDF1=10! : FDF2=5! : FF=10.1 : GOSUB *FDIST : FFP=1!-FP
 150  PRINT USING "F − α = ##.###" ; FFP
 160 REM ; 自由度  , 自由度  , 上側確率αからF 値を算出
 170  FDF1=10! : FDF2=5! : FQ=.01 : GOSUB *PFDIST
 180  PRINT USING "F 値 = ###.###" ; FFF
 190  END
2000 REM ; 副プログラム
2010 REM ; F 分布の下側確率
2020 *FDIST
2030  N1F=FIX(FDF1) : N2F=FIX(FDF2) : FX=FDF1*FF/(FDF2+FDF1*FF)
2040  IF FX<0 THEN FX=ABS(FX)
2050  IF N1F MOD 2 = 0 THEN 2100
2060  IF N2F MOD 2 = 0 THEN 2090
2070  FP=1!-2!*ATN(SQR((1!-FX)/FX))/API : FU=SQR(FX*(1!-FX))/API
2080  IAIF=1 : IBIF=1 : GOTO 2130
2090  FP=SQR(FX) : FU=SQR(FX)*(1!-FX)/2! : IAIF=1 : IBIF=2 : GOTO 2130
2100  IF N2F MOD 2 = 0 THEN 2120
2110  FP=1!-SQR(1!-FX) : FU=FX*SQR(1!-FX)/2! : IAIF=2 : IBIF=1 : GOTO 2130
2120  FP=FX : FU=FX*(1!-FX) : IAIF=2 : IBIF=2
2130  IF IAIF=N1F THEN 2180
2140  PH2=CSNG(IBIF)
2150  FOR ILA=IAIF TO N1F-2 STEP 2
2160    PH1=CSNG(ILA) : FP=FP-2!*FU/PH1 : FU=FU*(PH1+PH2)/PH1*FX
2170  NEXT ILA
2180  IF IBIF=N2F THEN 2230
2190  PH1=FDF1
2200  FOR ILB=IBIF TO N2F-2 STEP 2
2210    PH2=CSNG(ILB) : FP=FP+2!*FU/PH2 : FU=FU*(PH1+PH2)/PH2*(1!-FX)
2220  NEXT ILB
2230  FD=FU/FF
2240  RETURN
2250 REM ; F 分布の％点
2260 *PFDIST
2270  DF12=FDF1/2! : DF22=FDF2/2! : FA=2!/(9!*FDF1) : FA1=1!-FA
2280  FB=2!/(9!*FDF2) : FB1=1!-FB : AP=1!-FQ : GOSUB *PNORM
2290  FB=FB1*FB1-FB*AYQ*AYQ
2300  IF FB<=.8 THEN 2370
2310  FFO=((FA1*FB1+AYQ*SQR(FA1*FA1*FB+FA*FB))/FB) ^ 3
2320  KF=1
2330  FF=FFO : GOSUB *FDIST : FFF=FFO-(FP-AP)/FD : FFF=ABS(FFF)
2340  IF ABS(FFO-FFF) < .000001*FFF THEN 2410
2350  KF=KF+1 : IF KF>=30 THEN 2410
2360  FFO=FFF : GOTO 2330
2370  GX=DF12+DF22 : GOSUB *GAMMA : GF1=GA : GX=DF12 : GOSUB *GAMMA
2380  GF2=GA : GX=DF22 : GOSUB *GAMMA : GF3=GA
2390  FFO=(GF1/GF2/GF3*2!*FDF2 ^ (DF22-1!)/FDF1 ^ DF22/FQ) ^ (2!/FDF2)
2400  GOTO 2320
2410  RETURN
2420 REM ; γ関数
2430 *GAMMA
2440  B1=.999999        : B2=.422785        : B3=.41185         : B4=8.15652E-02
2450  B5=7.40649E-02    : B6=-1.25138E-04   : B7=1.22996E-02
2460  B8=-3.49613E-03   : B9=2.13858E-03
2470  C1=8.33333E-02    : C2=3.47222E-03    : C3=-2.68133E-03   : C4=-2.29472E-04
2480  C5=7.84039E-04    : C6=6.97281E-05    : C7=-5.92166E-04
2490  GW=GX : TG=1!
2500  IF GX>5! THEN 2600
2510  IF GX<1.5 THEN 2530
2520  IF GX>2.5 THEN 2550
2530  TG=TG/GW : GW=GW+1!
2540  IF GW>=1.5 THEN 2570 ELSE 2530
2550  GW=GW-1! : TG=TG*GW
2560  IF GW<=2.5 THEN 2570 ELSE 2550
2570  U=GW-2!
2580  GG=(((((((B9*U+B8)*U+B7)*U+B6)*U+B5)*U+B4)*U+B3)*U+B2)*U+B1
2590  GA=GG*TG : GOTO 2630
2600  V=1!/GX
2610  SS=((((((C7*V+C6)*V+C5)*V+C4)*V+C3)*V+C2)*V+C1)*V+1!
2620  GA=2.50663*EXP(-GX)*GX ^ (GX-.5)*SS
2630  RETURN
```

9．F分布の BASIC プログラムの説明

F 分布の上側確率 α，および F 値の数値計算を単精度で行うための，副プログラムを表１に示す。

F 値の数値計算には，正規分布の下側確率 $\phi(u)$ を算出するための副プログラム NORM，および正規分布の u 値を算出するための副プログラム PNORM が使用される。

さらに，F 分布表の作成には，χ^2 分布の下側確率 $F(\chi^2;\phi)$ を算出するための副プログラム CHI2，および χ^2 値を算出するための副プログラム PCHI2も使用される。

以上の正規分布および χ^2 分布の数値計算用の副プログラムは，文番号2640以降に続くが，これらは既報[3]で説明したから，表１では記載を省略した。

表１の主プログラムの文番号100～190は，目的に応じて任意に設定できるが，ここでは簡単な形式を例として示した。

また，表１の BASIC プログラムの１行の長さは，255桁まで記載することができるが，ここでは印刷の都合上短縮して作成した。

１）副プログラム FDIST

副プログラム FDIST は F 分布の自由度 ϕ_1 と自由度 ϕ_2，および F 値に対する(4)式の下側確率 $P(F;\phi_1,\phi_2)$ を算出する。上側確率 α への変換は，主プログラムで行う。

この数値計算には，自由度ϕ_1と自由度ϕ_2の組み合わせに対応して，(21．1)式～(24．2）式の初期値を選択し，つぎに β 分布の漸化式（14．2）式と（14．3）式，および（15．2）式と（15．3）式を利用して，(4)式の下側確率$P(F;\phi_1,\phi_2)$ を算出する。

ただし，F 分布に β 分布の漸化式を適用する際には，(12)式の変換が必要である。

自由度 $\phi_1=1\sim2$ および自由度 $\phi_2=1\sim2$ の組み合わせの場合は，漸化式の計算は不要であるから，I_x および U_x の初期値を（21．1）式～(24．2）式を使用して計算後，直ちに文番号2230に分岐し(25)式の確率密度を計算する。

2030：入力した実数型の自由度 ϕ_1(＝FDF1) および自由度 ϕ_2(＝FDF2) を，各々整数型の自由度 N1F および自由度 N2F に変換し，(12)式の x に対応する FX を計算する。

2040：(6)式を利用して，自由度 $\phi_1=120$，自由度 $\phi_2=1$に対する，4種類の上側確率 $\alpha=0.025$，0.010，0.005，0.001の F 値を算出する（副プログラム PFDIST を使用）場合には，FX が負となるから絶対値をとり，これを正とする。

2050：自由度 N1F が偶数の場合は2100に分岐し，奇数の場合はつぎに移る。

2060：自由度 N2F が偶数の場合は2090に分岐し，奇数の場合はつぎに移る。

2070：自由度 N1F と N2F が共に奇数の場合で，初期値を（21．1）式と（21．2）式で計算する。

2080：自由度 N1F と N2F が共に奇数の場合の基準値を，各々 1 と設定し，2130に分岐する。

2090：自由度 N1F が奇数，自由度 N2F が偶数の場合で，初期値を（22．1）式と（22．2）式で計算する。つぎに自由度が奇数と偶数の場合の基準値，1 および 2 を設定し，2130に分岐する。

2100：自由度 N1F が偶数の場合に，自由度 N2F が奇数か偶数かの判定を行う。自由度 N2F が偶数の場合は2120に分岐し，奇数の場合にはつぎに移る。

2110：自由度 N1F が偶数，自由度 N2F が奇数の場合で，初期値を（23．1）式と（23．2）式で計算する。つぎに自由度が偶数および奇数の場合の基準値，2 および 1 を設定し，2130に分岐する。

2120：自由度 N1F と N2F が共に偶数の場合で，初期値を（24．1）式と（24．2）式で計算する。つぎに自由度が共に偶数の場合の基準値を，各々 2 と設定しつぎに移る。

2130：自由度 N1F が，基準値の 1 または 2 に等しい場合は，2180に分岐する。

2140：自由度 N1F が 3 以上の場合は，最初に自由度 $\mu(=\frac{\phi_1}{2})$ に関して，漸化式（14．2）式および（15．2）式の計算を行うために，自由度 $\nu(=\frac{\phi_2}{2})$ を PH2 として固定する。

2150～2170：必要な自由度 μ まで，I_x および U_x を計算する。

2150：I_x および U_x の漸化式を計算する際の，反復数を（N1F－2）回と設定する。

2160：（14．2）式および（15．2）式の漸化式を使用して，$I_x(\mu+1, \nu)$ および $U_x(\mu+1, \nu)$ を計算する。

2180：自由度 N2F が，基準値の 1 または 2 に等しい場合は，2230に分岐する。

2190：自由度 N2F が 3 以上の場合は，自由度 $\nu(=\frac{\phi_2}{2})$ に関して，漸化式（14．3）式および（15．3）式の計算を行うために，すでに計算した自由度 $\mu(=\frac{\phi_1}{2})$ を PH1 として固定する。

2200～2220：必要な自由度 ν まで，I_x および U_x を計算する。

2200：I_x および U_x の漸化式を計算する際の，反復数を（N2F－2）回と設定する。

2210：（14．3）式および（15．3）式の漸化式を使用して，$I_x(\mu, \nu+1)$ および $U_x(\mu, \nu$

＋1) を計算する。

2230：(25)式を使用して，(2)式の確率密度 $f(F;\phi_1,\phi_2)$ を算出する。

140：この主プログラムで(5)式に従い，下側確率 FP を上側確率 FFP に変換する。

2）副プログラム PFDIST

副プログラム PFDIST は F 分布の自由度 ϕ_1 と自由度 ϕ_2，および下側確率 $P(F;\phi_1,\phi_2)$ に対する％点の F 値を算出する。

2270～2280：Newton 法の第1近似値の計算式を選択する条件となる(26)式と，(27)式の計算に必要な b と u_α，および a を計算する。

2290：(26)式を計算し，これを FE とする。

2300：FE≦0.8が成立する場合は，2370に分岐して(30)式を計算し，成立しない場合にはつぎに移る。

2310：(27)式に対応する計算を行い，これを Newton 法の第1近似値 FFO とする。

2320：Newton 法の反復数の初期値を設定する。

2330～2360：Newton 法を繰り返す。

2330：(31)式を計算する。(31)式の x_{i+1} に対応する FFF が負となる場合は，絶対値をとりこれを正とする。FFF が負となるのは，つぎに示す場合のみである。

① 自由度 $\phi_1=1$，自由度 $\phi_2=12$，上側確率 $\alpha=0.001$ に対する F 値の算出。

② (6)式を利用して，自由度 $\phi_1=120$，自由度 $\phi_2=1$ に対する，2種類の上側確率 $\alpha=0.025$，0.005の F 値の算出。

2340：収束値を10^{-6}と設定し，(31)式の Newton 法の公式に従い，(32)式の収束判定を行う。収束した場合は計算を終了させる。

2350：収束しない場合は反復数を加算し，反復数が設定した30回を超えた場合には，計算を終了させる。

2360：収束しない場合は使用した FFF を FFO に移し，新たに FFF を設定し，収束するまで Newton 法を繰り返す。

2370～2380：FE≦0.8が成立する場合である。この場合は，第1近似値の算出に使用される(30)式に含まれるβ関数の計算は，(16)式のβ関数とΓ関数との関係を利用して行う。Γ関数の数値計算は $\Gamma(\frac{\phi_1}{2})$ と $\Gamma(\frac{\phi_2}{2})$，および $\Gamma(\frac{\phi_1+\phi_2}{2})$ を副プログラム GAMMA を使用して行う。

2390：(30)式に対応する計算を行い，これを Newton 法の第1近似値 FFO とする。

2400：2320に戻り(30)式で算出した第1近似値 FFO を使用して，Newton 法を繰り返す。

表2　*F*分布表（その1）

$\alpha=0.050$

ϕ_2 \ ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

表3　*F*分布表（その2）

$\alpha=0.025$

ϕ_2 \ ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	648	799	864	900	922	937	948	957	963	969	977	985	993	997	1001	1005	1010	1014	1018
2	38.5	39.0	39..2	39.2	39.3	39.3	39..4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5
3	17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.1	14.0	14.0	13.9	13.9
4	12.2	10.6	10.0	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2,72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

表4　*F*分布表（その3）

$\alpha=0.010$

ϕ_2 \ ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	5000	5405	5628	5762	5862	5927	5980	6019	6053	6114	6161	6196	6255	6294	6301	6313	6339	6364
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

表5　*F*分布表（その4）

$\alpha=0.005$

ϕ_2 \ ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
2	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199
3	55.6	49.8	47.5	46.2	45.4	44.8	44.4	44.1	43.9	43.7	43.4	43.1	42.8	42.6	42.5	42.3	42.1	42.0	41.8
4	31.3	26.3	24.3	23.2	22.5	22.0	21.6	21.4	21.1	21.0	20.7	20.4	20.2	20.0	19.9	19.8	19.6	19.5	19.3
5	22.8	18.3	16.5	15.6	14.9	14.5	14.2	14.0	13.8	13.6	13.4	13.1	12.9	12.8	12.7	12.5	12.4	12.3	12.1
6	18.6	14.5	12.9	12.0	11.5	11.1	10.8	10.6	10.4	10.3	10.0	9.81	9.59	9.47	9.36	9.24	9.12	9.00	8.88
7	16.2	12.4	10.9	10.1	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	8.18	7.97	7.75	7.64	7.53	7.42	7.31	7.19	7.08
8	14.7	11.0	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.29	6.18	6.06	5.95
9	13.6	10.1	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.52	5.41	5.30	5.19
10	12.8	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.97	4.86	4.75	4.64
11	12.2	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54	5.42	5.24	5.05	4.86	4.76	4.65	4.55	4.45	4.34	4.23
12	11.8	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.23	4.12	4.01	3.90
13	11.4	8.19	6.93	6.23	5.79	5.48	5.25	5.08	4.94	4.82	4.64	4.46	4.27	4.17	4.07	3.97	3.87	3.76	3.65
14	11.1	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	5.03	4.86	4.72	4.60	4.43	4.25	4.06	3.96	3.86	3.76	3.66	3.55	3.44
15	10.8	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.58	3.48	3.37	3.26
16	10.6	7.51	6.30	5.64	5.21	4.91	4.69	4.52	4.38	4.27	4.10	3.92	3.73	3.64	3.54	3.44	3.33	3.22	3.11
17	10.4	7.35	6.16	5.50	5.07	4.78	4.56	4.39	4.25	4.14	3.97	3.79	3.61	3.51	3.41	3.31	3.21	3.10	2.98
18	10.2	7.21	6.03	5.37	4.96	4.66	4.44	4.28	4.14	4.03	3.86	3.68	3.50	3.40	3.30	3.20	3.10	2.99	2.87
19	10.1	7.09	5.92	5.27	4.85	4.56	4.34	4.18	4.04	3.93	3.76	3.59	3.40	3.31	3.21	3.11	3.00	2.89	2.78
20	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.92	2.81	2.69
21	9.83	6.89	5.73	5.09	4.68	4.39	4.18	4.01	3.88	3.77	3.60	3.43	3.24	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.61
22	9.73	6.81	5.65	5.02	4.61	4.32	4.11	3.94	3.81	3.70	3.54	3.36	3.18	3.08	2.98	2.88	2.77	2.66	2.55
23	9.63	6.73	5.58	4.95	4.54	4.26	4.05	3.88	3.75	3.64	3.47	3.30	3.12	3.02	2.92	2.82	2.71	2.60	2.48
24	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69	3.59	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.66	2.55	2.43
25	9.48	6.60	5.46	4.84	4.43	4.15	3.94	3.78	3.64	3.54	3.37	3.20	3.01	2.92	2.82	2.72	2.61	2.50	2.38
26	9.41	6.54	5.41	4.79	4.38	4.10	3.89	3.73	3.60	3.49	3.33	3.15	2.97	2.87	2.77	2.67	2.56	2.45	2.33
27	9.34	6.49	5.36	4.74	4.34	4.06	3.85	3.69	3.56	3.45	3.28	3.11	2.93	2.83	2.73	2.63	2.52	2.41	2.29
28	9.28	6.44	5.32	4.70	4.30	4.02	3.81	3.65	3.52	3.41	3.25	3.07	2.89	2.79	2.69	2.59	2.48	2.37	2.25
29	9.23	6.40	5.28	4.66	4.26	3.98	3.77	3.61	3.48	3.38	3.21	3.04	2.86	2.76	2.66	2.56	2.45	2.33	2.21
30	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3.18	3.01	2.82	2.73	2.63	2.52	2.42	2.30	2.18
40	8.83	6.07	4.98	4.37	3.99	3.71	3.51	3.35	3.22	3.12	2.95	2.78	2.60	2.50	2.40	2.30	2.18	2.06	1.93
60	8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	2.08	1.96	1.83	1.69
120	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.87	1.75	1.61	1.43
∞	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.67	1.53	1.36	1.00

表 6　F分布表（その 5）

$\alpha=0.001$

ϕ_2 \ ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
2	998.5	999.0	999.1	999.3	999.3	999.3	999.3	999.3	999.3	999.3	999.3	999.6	999.7	999.8	999.1	999.7	999.5	999.5	999.5
3	167.0	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	131.6	130.6	129.9	129.2	128.3	127.4	126.4	125.9	125.4	124.9	124.5	124.0	123.5
4	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.53	49.66	49.00	48.47	48.05	47.41	46.76	46.10	45.77	45.43	45.09	44.75	44.40	44.05
5	47.18	37.12	33.20	31.08	29.75	28.83	28.16	27.65	27.24	26.92	26.42	25.91	25.39	25.13	24.87	24.60	24.33	24.06	23.79
6	35.51	27.00	23.70	21.92	20.80	20.03	19.46	19.03	18.69	18.41	17.99	17.56	17.12	16.90	16.67	16.44	16.21	15.98	15.75
7	29.24	21.69	18.77	17.20	16..21	15.52	15.02	14.63	14.33	14.08	13.71	13.32	12.93	12.73	12.53	12.33	12.12	11.91	11.70
8	25.41	18.49	15.83	14.39	13.48	12.86	12.40	12.05	11.77	11.54	11.19	10.84	10.48	10.30	10.11	9.92	9.73	9.53	9.33
9	22.86	16.39	13.90	12.56	11.71	11.13	10.70	10.37	10.11	9.89	9.57	9.24	8.90	8.72	8.55	8.37	8.19	8.00	7.81
10	21.04	14.91	12.55	11.28	10.48	9.93	9.52	9.20	8.96	8.75	8.44	8.13	7.80	7.64	7.47	7.30	7.12	6.94	6.76
11	19.69	13.81	11.56	10.35	9.58	9.05	8.66	8.35	8.12	7.92	7.63	7.32	7.01	6.85	6.68	6.52	6.35	6.18	6.00
12	18.64	12.97	10.80	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48	7.29	7.00	6.71	6.40	6.25	6.09	5.93	5.76	5.59	5.42
13	17.81	12.31	10.21	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.98	6.80	6.52	6.23	5.93	5.78	5.63	5.47	5.30	5.14	4.97
14	17.14	11.78	9.73	8.62	7.92	7.44	7.08	6.80	6.58	6.40	6.13	5.85	5.56	5.41	5.25	5.10	4.94	4.77	4.60
15	16.59	11.34	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26	6.08	5.81	5.54	5.25	5.10	4.95	4.80	4.64	4.47	4.31
16	16.12	10.97	9.01	7.94	7.27	6.80	6.46	6.19	5.98	5.81	5.55	5.27	4.99	4.85	4.70	4.54	4.39	4.23	4.06
17	15.72	10.66	8.73	7.68	7.02	6.56	6.22	5.96	5.75	5.58	5.32	5.05	4.78	4.63	4.48	4.33	4.18	4.02	3.85
18	15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.56	5.39	5.13	4.87	4.59	4.45	4.30	4.15	4.00	3.84	3.67
19	15.08	10.16	8.28	7.27	6.62	6.18	5.85	5.59	5.39	5.22	4.97	4.70	4.43	4.29	4.14	3.99	3.84	3.68	3.51
20	14.82	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24	5.08	4.82	4.56	4.29	4.15	4.00	3.86	3.70	3.54	3.38
21	14.59	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.56	5.31	5.11	4.95	4.70	4.44	4.17	4.03	3.88	3.74	3.58	3.42	3.26
22	14.38	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.99	4.83	4.58	4.33	4.06	3.92	3.78	3.63	3.48	3.32	3.15
23	14.20	9.47	7.67	6.70	6.08	5.65	5.33	5.09	4.89	4.73	4.48	4.23	3.96	3.82	3.68	3.53	3.38	3.22	3.05
24	14.03	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80	4.64	4.39	4.14	3.87	3.74	3.59	3.45	3.29	3.14	2.97
25	13.88	9.22	7.45	6.49	5.89	5.46	5.15	4.91	4.71	4.56	4.31	4.06	3.79	3.66	3.52	3.37	3.22	3.06	2.89
26	13.74	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83	4.64	4.48	4.24	3.99	3.72	3.59	3.44	3.30	3.15	2.99	2.82
27	13.61	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76	4.57	4.41	4.17	3.92	3.66	3.52	3.38	3.23	3.08	2.92	2.75
28	13.50	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.93	4.69	4.50	4.35	4.11	3.86	3.60	3.46	3.32	3.18	3.02	2.86	2.69
29	13.39	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.87	4.64	4.45	4.29	4.05	3.80	3.54	3.41	3.27	3.12	2.97	2.81	2.64
30	13.29	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.39	4.24	4.00	3.75	3.49	3.36	3.22	3.07	2.92	2.76	2.59
40	12.61	8.25	6.59	5.70	5.13	4.73	4.44	4.21	4.02	3.87	3.64	3.40	3.14	3.01	2.87	2.73	2.57	2.41	2.23
60	11.97	7.77	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.86	3.69	3.54	3.31	3.08	2.83	2.69	2.55	2.41	2.25	2.08	1.89
120	11.38	7.32	5.78	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.38	3.24	3.02	2.78	2.53	2.40	2.26	2.11	1.95	1.77	1.54
∞	10.83	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	3.10	2.96	2.74	2.51	2.27	2.13	1.99	1.84	1.66	1.45	1.00

3）副プログラム GAMMA

副プログラム GAMMA は，Γ 関数の数値計算を⒄式〜⒇式に従って行う。

2440〜2460：⒄式の Γ 関数の最良近似式の係数である。

2470〜2480：⒇式の Γ 関数の漸近展開式の係数である。

2490：入力した Γ 値を表す GX を，GW とおきかえる。漸化式の初期値を TG に設定する。

2500：GX＞5の場合は2600に分岐し，⒇式を計算する。

2510：GX＜1.5の場合は2530に分岐する。

2520：GX＞2.5の場合は2550に分岐する。

2530〜2540：⒅式の Γ 関数の漸化式を用いて，GW が GW≧1.5の範囲に入るまで計算を繰り返し，2570に分岐する。

2550〜2560：⒆式の Γ 関数の漸化式を用いて，GW が GW≦2.5の範囲に入るまで計算を繰り返し，つぎに移る。

2570：⒄式の計算を行うために，⒄式に従い U＝GW−2の変換を行う。

2580〜2590：⒄式の Γ 関数の数値計算を，変数 U について行う。

2600：(20)式の計算を行うために，(20)式に従い $V=\frac{1}{GX}$ の変換を行う。

2610〜2620：(20)式の Γ 関数の数値計算を，変数Vについて行う。

10. *F* 分布表

5種類の上側確率 $\alpha=0.050,\ 0.025,\ 0.010,\ 0.005,\ 0.001$，自由度 $\phi_1=1\sim\infty$，自由度 $\phi_2=1\sim\infty$ に対して，作成された F 分布表を表2〜表6に示す。

F 分布表は副プログラム PFDIST のみを使用して，作成することはできない。

その理由は，(29)式に対応する文番号2300の FE≦0.8が成立すれば，(30)式に含まれる β 関数の数値計算が必要となるからである。

この β 関数は，(16)式の β 関数と Γ 関数との関係を利用して，β 関数を Γ 関数に変換後，Γ 関数として数値計算を行う。

表7に(29)式が成立する場合，すなわち Γ 関数による数値計算が必要となる場合の，上側確率 α に対する自由度 ϕ_2 の範囲を示す。ただし，自由度 ϕ_1 は，(29)式には関与しない。

表7　Γ 関数による数値計算が必要となる自由度 ϕ_2 の範囲

上側確率 α	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
自由度 ϕ_2	≦5	≦6	≦8	≦9	≦12

表7に示したように，例えば，上側確率 $\alpha=0.001$，自由度 $\phi_2\leqq12$ の範囲内では，Γ 関数による数値計算が必要である。

また，(20)式の x が5以上の Γ 関数の数値計算式には，x のベキ乗の計算式 $x^{(x-0.5)}$ が含まれる。この x の制限値は使用したコンパイラ（富士通：F-BASIC 86 HG）では，$x\leqq27\ (27^{26.5}=5\times10^{37})$ である。

これらの自由度 ϕ_2 と Γ 関数の制限値との関係から，$x=\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\leqq27$ の範囲内でなければ，(20)式は使用できない。

例えば，上側確率 $\alpha=0.001$，自由度 $\phi_1=60$，自由度 $\phi_2=12$ の場合は，$x=\frac{\phi_1+\phi_2}{2}=36$ となり(20)式は使用できない。

上側確率 $\alpha=0.001$，自由度 $\phi_1=40$，自由度 $\phi_2=12$ の場合は，$x=\frac{\phi_1+\phi_2}{2}=26$ となり(20)式は使用できる。

したがって，$\phi_1=60$～120の範囲内の F 値は，副プログラム PFDIST を使用して，直接計算をすることはできないが，$\phi_1=1$～40の範囲内の F 値は，直接計算をすることができる。

以上の結果から，F値の算出方法は，5種類の上側確率$\alpha=0.050$，0.025，0.010，0.005，0.001に対して，指定する自由度の範囲から，つぎの4種類の方法に分類される。

1）自由度 $\phi_1=1$～40，自由度 $\phi_2=1$～120

この範囲内では，副プログラム PFDIST を直接使用して，F値を算出する。

2）自由度 $\phi_1=60$～120，自由度 $\phi_2=1$～120

この範囲内では，Γ関数の数値計算の制限値を超えるから，(6)式のF分布の分布関数の関係を利用して，自由度 ϕ_1 と自由度 ϕ_2 を入れかえ，F 値を算出する。

例えば，上側確率 $\alpha=0.001$，自由度 $\phi_1=60$～120，自由度 $\phi_2=1$～120の場合に，(6)式を適用すると，下側確率 $1-\alpha=0.999$，自由度 $\phi_1=1$～120，自由度 $\phi_2=60$～120のF値を計算することになり，上側確率 $\alpha=0.001$ に対する制限値 $\phi_2\leqq12$ は，無視することができる。

3）自由度 $\phi_1=\infty$，自由度 $\phi_2=1$～120

この範囲内では，(8)式の F 分布と χ^2 分布との関係を利用して，χ^2 値を副プログラム PCHI2 を使用して求め，これからF値を算出する。

4）自由度 $\phi_1=1$～120，自由度 $\phi_2=\infty$

この範囲内では，(7)式を利用して3）と同じく χ^2 値を求め，これからF値を算出する。

ただし，自由度 $\phi_1=1$，上側確率 $\alpha=0.005$および $\alpha=0.001$のF値は精度不良のため，このF分布表からは除く。

結　　語

この BASIC プログラムはF分布について，上側確率 $\alpha=0.05$～0.001，自由度 $\phi_1=1$～120，自由度 $\phi_2=1$～120の範囲内の任意の F 値を算出することができる。

特に，上側確率 $\alpha=0.001$[4]についての F 値も算出できることが，この BASIC プログラムの特徴である。

ただし，上側確率 $\alpha=0.05$～0.001，自由度 $\phi_1=120$～∞，自由度 $\phi_2=120$～∞の範囲内では，下限の自由度120および上限の自由度∞に対する，F 値のみは保証されるが，その中間の自由度$120<(\phi_1,\ \phi_2)<\infty$に対する，$F$ 値は保証されない。

また，副プログラム FDIST を使用して，任意の自由度の F 値に対する，上側確率 $\alpha(\geqq 0.001)$ を算出することもできる。

参 考 文 献

(1) 大村　平，今田直孝：推測統計の FORTRAN，16—17，48—67，オーム社，1972.

(2) 近藤良夫，舟阪　渡：技術者のための統計的方法，61—65，67—68，634—637，共立出版，1971.

(3) 川口俊郎，川上弘泰：正規分布および χ^2分布の BASIC による数値計算，九州産業大学国際文化学部紀要，第 8 号，185—203，1997.

(4) N.L. JOHNSON, F.C. LEONE : Statistics and Experimental Design In Engineering and the Physical Sciences, 467—470, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.