

# 囚人のジレンマセルオートマトンにおける 空間・時間的特性について

肱 黒 長 憲

## 1 はじめに

### 1.1 囚人のジレンマセルオートマトン

互いに協調すればよりよい結果が得られるのに、自分だけの利益を求めるために共に不利な結果になってしまう。こうしたよくある状況を二人のプレーヤーによるゲームにしたものが囚人のジレンマである。空間に配置された多数のプレーヤーが近隣との間で囚人のジレンマゲームを一斉に行い、その利得に応じて自らの戦略を更新するとき、これを囚人のジレンマセルオートマトン（以下 CA とする）という。

囚人のジレンマ CA は、社会における協調性がどのように発達し維持されるのかという基本的な問題に対する興味深いメタファーとして導入された。1992年に Nowak と May は、利己的に振舞う個体が空間に配置されると強制的に振舞う集団が自然に形成されることをはじめて見出した。協調者と離反者が作り出すパターンや時間変化は、囚人のジレンマゲームの利得を決めるパラメータの値によってさまざまに変化し、周期的に変化する状態やカオス的な状態が存在することが示された<sup>[1,2,3]</sup>。これらの先駆的な研究に引き続いて、さまざまな分野で囚人のジレンマ CA に関する多くの研究が報告されている<sup>[4]</sup>。

われわれは、以前、個体のランダムな移動を許す囚人のジレンマ CA について議論した。このモデルは、更新において向かい合った両隣の個体が入れ替わるという行動が入る以外は Nowak と May のモデルと同じである。協調者と離反者の定常な共存状態が存在し、その時間的特性から6つの領域に分けられることが示された。また、外部から協調を強制された場合、それがむしろ逆効果であるという興味深い結果も得られた<sup>[5]</sup>。

われわれが用いる囚人のジレンマ CA は以下のようなものである。 $n \times n$  の2次元正方格子の各サイト上に個体を配置する。個体は、協調するか離反するかの2つの戦略のうちのいずれかの戦略をとる。初期状態として協調者と離反者をランダムに配置する。時間発展のルールは次のように与えられる。各個体は自分の Moore 近傍サイト（第2近傍までの8つのサイトで自分自身は含まないとする）と各々囚人のジレンマゲームをプレーする。プレーにより各個体は右の

|    |            |           |
|----|------------|-----------|
|    | 協調         | 離反        |
| 協調 | (1, 1)     | (0, $p$ ) |
| 離反 | ( $p$ , 0) | (0, 0)    |

利得行列にしたがって利得を得る。すなわち、協調者は、協調者と隣接するとき利得1を得、離反者と隣接するときは何も得ない。離反者は、協調者と隣接するとき利得 $p$  ( $p > 1$ )を得、離反者と隣接するときは何も得ない。この値 $p$ は「裏切りの誘惑度」であり、系の時間発展を特徴付ける唯一のパラメータである。各個体の総利益は8つの Moore 近傍とプレーして得た利得の総和で与えられる。時間 $t_{j+1}$ におけるサイト $i$ の状態 $s_i(t_{j+1})$ は、時間 $t_j$ において自分自身を含む Moore 近傍サイトの中の最も大きな得点を得た個体の戦略で置き換えられる。格子の端の影響を無くするために周期的境界条件を課す。系の時間変化を表す力学量としては、時間 $t_j$ における協調者に占められたサイトの総数を $c(t_j)$ として協調者比率 $x(t_j) = c(t_j)/n^2$  ( $0 \leq x \leq 1$ )が用いられる。

上で述べた CA は個体の移動を許さないで、これを固定系と呼び、各個体がサイトをランダムに移動できるように拡張した以下のものを移動系と呼ぶ。2次元正方格子のサイトに配置された個体は、協調と離反の2通りの戦略のいずれかを取り、同時に、4つの最近接サイトのいずれかの方向を向く。時間発展は2段階で行われる。(1)まず、ゲームの利得による戦略 $s_i(t_j)$ の更新は、固定系の場合と同様に行われる。(2)次に、各個体は最近接サイト同士で向き合っている場合に限って互いにサイトを入れ替わる。したがって、この場合、サイトの戦略が互いに入れ替わる。(1)、(2)の手続きは、いずれも一斉に行われる。その後、全個体はそれぞれ新たにランダムな方向を向く。すなわち、各個体の移動はその戦略とはまったく無関係にランダムに行われる。

パラメータ $p$ の範囲 $1 \leq p \leq 2$ において、固定系では、周期的変化、不規則な変化、静止および協調者の絶滅の各状態が得られ、移動系では、協調者制圧、共存、協調者絶滅の各状態が得られる<sup>[5]</sup>。固定系、移動系のいずれにおいても、協調者と離反者が共存する複雑な状態がどのように形成されるのかという興味深い問題がある。固定系の共存状態はカオスである可能性が高い。

われわれの目的は、固定系と移動系における共存状態が示す空間・時間的な特性について議論することである。協調者のクラスターのサイズ分布を調べることによって空間的パターンの自己相似性について述べる。定常な空間的パターンは系のダイナミクスによって維持される。時間的非線形特性を調べるために、協調者比率時系列に注目し、その相関次元を調べる。

## 1.2 サイズ分布指数

複雑な断片からなるパターンをフラクタルとして捉えるために、自己相似性とフラクタル次元という2つの要素がある。自己相似性はパターンがフラクタルであるための必要条件であり、

フラクタル次元はフラクタルパターンの図形としての複雑さの度合いを表す。ここでは、パターンのフラクタル性を表す特性指数として、サイズの累積分布のべき指数を考える。

パターンのサイズ分布  $f(s)$  は、そのサイズが  $s$  と  $s+ds$  の間の値である断片の個数を  $f(s)ds$  として定義される。また、サイズが  $s$  よりも小さな断片の総数

$$F(s) = \int_0^s f(s) ds$$

は累積分布関数である。累積分布  $F(s)$  が、 $s \rightarrow \infty$  の漸近形としてべき則

$$F(s) \simeq s^\alpha$$

に従う場合、パターンは自己相似性を持つと考える。

$$\alpha \simeq \frac{\log F(s)}{\log s}$$

で与えられる指数  $\alpha$  は、パターンを特徴付ける特性指数で、これをサイズ分布指数と呼ぶ。

### 1.3 時系列相関次元

ある量の時系列から系の動的特性を調べる方法として、遅延座標を用いた時系列解析がある。時系列  $\{x(t)\}$  から時間差  $\tau$  で埋め込み次元を  $m$  としてベクトル

$$\vec{x} = (x(t), x(t-\tau), x(t-2\tau), \dots, x(t-(m-1)\tau))$$

を作る。時間差  $\tau$  と埋め込み次元  $m$  が適当に選ばれるとき、系の動的な性質はすべて埋め込み空間内のベクトル  $\vec{x}$  の振る舞いに受け継がれる。時間差  $\tau$  を決定するには、時系列  $\{x(t)\}$  の自己相関関数  $R(\tau)$

$$R(\tau) = \frac{1}{n-\tau} \sum_{i=1}^{n-\tau} \frac{(x(t_i) - \bar{x})(x(t_i + \tau) - \bar{x})}{\sigma^2},$$

の振る舞いから決める方法がある。ここで、 $\bar{x}$  は平均、 $\sigma^2$  は分散である。 $R(\tau) = 0$  となる最小の  $\tau$  を埋め込みの時間差とする。

遅延座標を用いて、時系列データから相関次元を決定する方法が Grassberger と Procaccia によって考案された<sup>[6]</sup>。以下、これを GP 法と呼ぶ。埋め込みによって  $m$  次元空間内に構成された  $N$  個のベクトル  $\vec{x}(i)$ , ( $i=1, 2, \dots, N$ ) について、相関積分  $C(r)$  は次式で与えられる。

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \theta[r - |\vec{x}(i) - \vec{x}(j)|],$$

$$\theta(z) = \begin{cases} 1 & (z > 0) \\ 0 & (z \leq 0) \end{cases}$$

これは、2つのベクトルの間の距離が  $r$  以内にあるベクトル対の総数である。ベクトル間の距離は通常、ユークリッド距離

$$|\vec{x}(i) - \vec{x}(j)| = \{(x(t_i) - x(t_j))^2 + (x(t_i + \tau) - x(t_j + \tau))^2, \\ + \dots + (x(t_i + (m-1)\tau) - x(t_j + (m-1)\tau))^2\}^{1/2}$$

で定義されるが、計算時間を短縮するために、ここでは最大成分距離

$$|\vec{x}(i) - \vec{x}(j)| = \max\{|x(i)_k - x(j)_k|, 1 \leq k \leq m\}$$

を用いる。

$C(r)$  を用いて、相関次元  $D_2$  は

$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(r)}{\log r}$$

で与えられる。いろいろな埋め込み次元  $m$  の値に対して、 $\log C(r) - \log r$  プロットの直線部分 (スケーリング領域) の勾配を求める。これを相関指数と呼び、 $m$  に対してプロットした相関指数が平坦になるならば、その定常値が相関次元になる。相関指数が定常となる最小の  $m$  が最適な埋め込み次元になる。

## 2. 固定された囚人のジレンマ CA

### 2.1 固定系のクラスターサイズ分布

囚人ジレンマ CA では、協調者か離反者のいずれかによってセルが占められることによって 2次元 2値型のパターンが形成される。300×300の2次元正方格子に比率  $q=0.7$  でランダムに協調者が配置された初期状態から出発する。パラメータの範囲 ( $1 < p < 8/5$ ) では、協調者の面状の分布の中に離反者が線状に存在して、境界部分で周期的な変化が繰り返されている。興味深いのはカオス的な変化を示すパラメータ範囲 ( $8/5 < p < 5/3$ ) である。協調者数が大きく変化する過渡的な状態を経て、初期から60時間ステップ程度で系のパターンは協調者と離反者が複雑に入り混じった共存状態に達する。この状態でのパターンの特性を調べるために、その空間的配置には関わらず、クラスターのサイズ分布に注目する。最近接セル(ノイマン近傍)でつながった協調者のセルは同じクラスターに属するとして、協調者クラスターを定義する。1つの協調者クラスター内に含まれるセルの個数  $s$  でクラスターのサイズを表す。

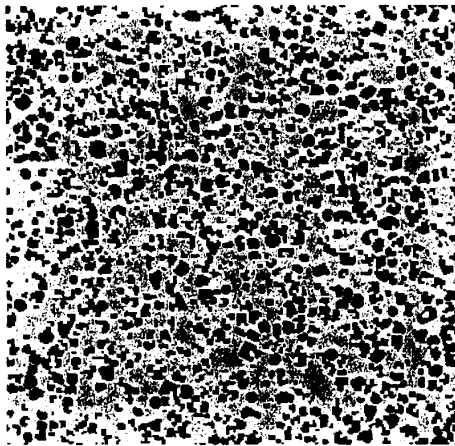


図1：固定系 ( $300 \times 300, p=1.64$ ) のクラスター (協調者を黒, 離反者を灰色で示す)

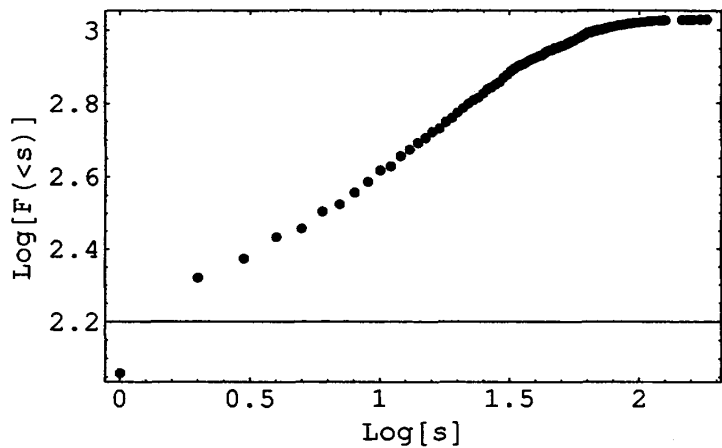


図2：固定系 ( $p=1.64$ ) のサイズ累積分布関数

図1は、 $p=1.64$ のCAにおけるスナップショットである。図2には、このパターンについてクラスターサイズ  $s$  に対する累積分布関数  $F(s)$  を求めて、 $\log F(s) - \log s$  をプロットした。直線となるスケーリング領域が存在し、直線の勾配からクラスターサイズ分布指数  $\alpha$  が得られる。パターンの複雑な変化によって、サイズ分布指数は図3に示されるよう

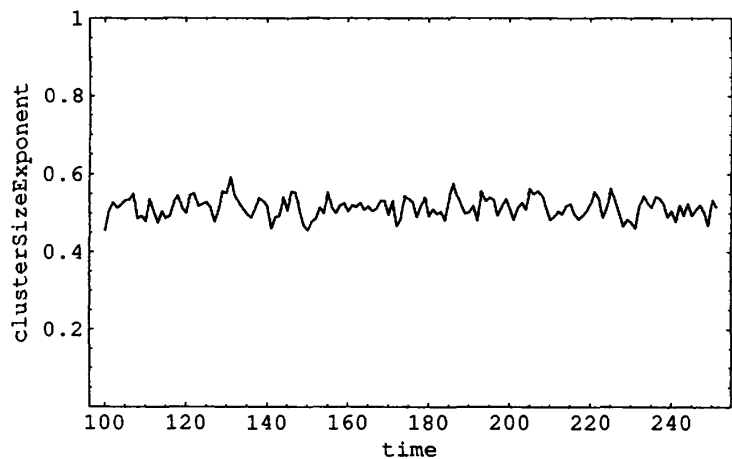


図3：固定系 ( $p=1.64$ ) のサイズ分布指数

に時間的に揺らいている。過渡的な時期を過ぎた時間 (時間ステップで100から250) での時間平均値を系のサイズ分布指数とみなすことにする。

このようにして得られたクラスターサイズ分布指数を表1に示す。パラメータ  $p$  の範囲  $8/5 < p < 5/3$  で、サイズ分布指数は  $p$  の値によらずほとんど一定となり、 $\alpha=0.515$  が得られた。サイズ分布指数が一定値を持つことは、パターン形成においてフラクタル性を生じるような共通のメカニズムがあることを示している。

表 1. 固定系のクラスターサイズ分布指数

| $p$                             | 状態 | サイズ分布指数 $\alpha$<br>( )内は標準偏差値 |
|---------------------------------|----|--------------------------------|
| $1 < p < \frac{8}{5}$           | 周期 | —                              |
| $\frac{8}{5} < p < \frac{5}{3}$ | 共存 | $p = 1.61$ 0.515 (0.022)       |
|                                 |    | $p = 1.62$ 0.514 (0.021)       |
|                                 |    | $p = 1.63$ 0.516 (0.023)       |
|                                 |    | $p = 1.64$ 0.514 (0.026)       |
|                                 |    | $p = 1.65$ 0.517 (0.021)       |
|                                 |    | $p = 1.66$ 0.514 (0.022)       |
| $\frac{5}{3} < p < \frac{7}{4}$ | 静止 | —                              |
| $\frac{7}{4} < p$               | 絶滅 | —                              |

## 2.2 固定系の時系列相関

固定系のパラメータ範囲  $\frac{8}{5} < p < \frac{5}{3}$  では、複雑な空間パターンと不規則な時間変化が生じる。系の決定論的性格からこれはカオスであると考えられるが、それを結論付けるために時系列の非線形相関を調べてみよう。時系列の非線形解析は、普通、内容が良く分からない系から得られた時系列データについてその内容を推定するために行われるが、ここでは、囚人のジレンマ CA から得られる協調者比率の時系列データについて、GP 法を適用して相関次元  $D_2$  を評価することを試みる。協調者比率時系列が系のカオス的特性を反映しているとすれば、埋め込み次元より小さい非整数の相関次元が得られることが期待される。

$p = 1.64$  での協調者比率時系列（全時間ステップ 2500）を図 4 に、その自己相関関数  $R(\tau)$  を図 5 に示す。時間差  $\tau \approx 5$  で自己相関関数は最初に 0 になる。そこで、この時系列に対して、時間差  $\tau = 5$  の遅延座標を導入し、埋め込み次元  $m$  に対する相関積分  $C(r)$  を求める。

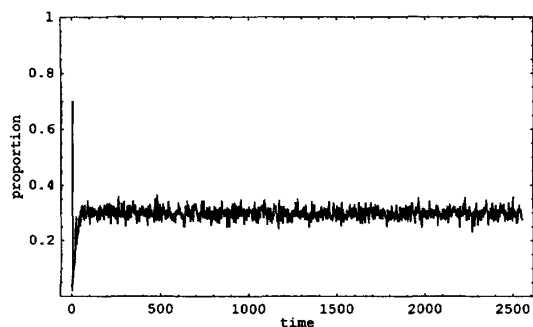


図 4 : 固定系 ( $p = 1.64$ ) の協調者比率時系列

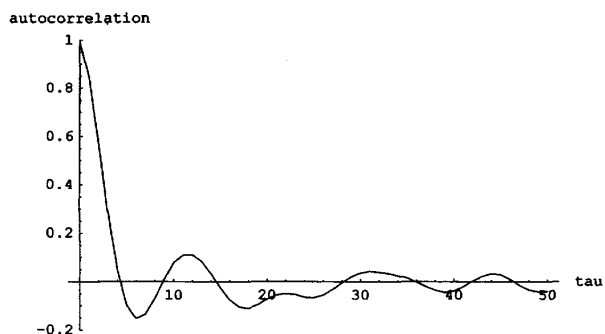


図 5 : 固定系 ( $p = 1.64$ ) の協調者比率時系列の自己相関関数

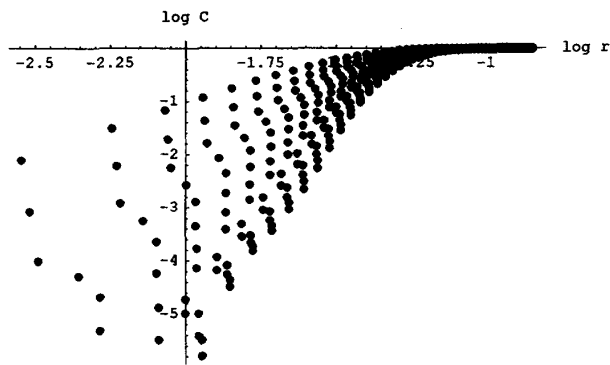


図6：固定系( $p=1.64$ )の協調者比率相関積分プロット ( $2 \leq m \leq 15$ )

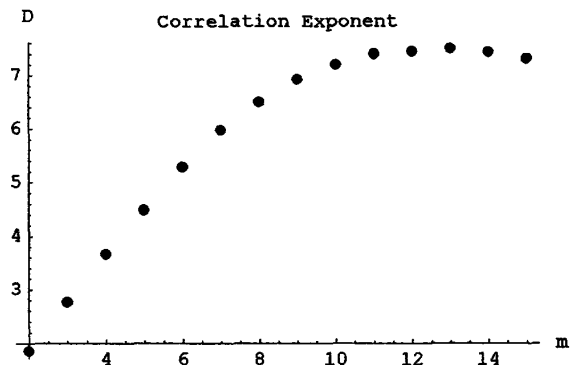


図7：固定系( $p=1.64$ )の協調者比率時系列相関指数

図6は、 $2 \leq m \leq 15$ での  $\log C(r) - \log r$  プロットである。直線部分の勾配（相関指数）は  $m$  の増加とともに増加する。もし、 $m$  のある値以上で勾配が一定となれば、相関次元を推定することができる。相関指数の振舞いには初期配置の違いによってばらつきがあるので、異なる初期配置から出発した5つの時系列について平均した相関指数を埋め込み次元  $m$  に対してプロットしたものを図7に示す。 $m=11$ 以上で勾配値の定常化が起こっているように見える。このような結果はパラメータ領域  $8/5 < p < 5/3$  では  $p$  の値によらず得られる。

ところで、ここで推定される相関次元 $\approx 7.5$ は、使われたデータ数 (2500) から推定可能な相関次元の限界を超しており、この値は信頼できるとは言えない。Ruelle は相関積分プロットの線形関係を確保するために相関次元  $D_2$  が高くなるにつれて指数関数的に長い時系列データが必要になることを指摘した<sup>[7]</sup>。 $N$  をデータ点数とすると推定可能な次元の上限は  $2 \log N$  である。実際、 $m=10$ 以上でのスケーリング領域は1/2ディケード程度しかなく正確に勾配の値を特定しているとは言い難い。しかし、われわれの計算時間に限界があって、必要なだけの時系列長を得ることはできなかった。

### 3 ランダムに移動する囚人のジレンマ CA

#### 3.1 移動系のクラスターサイズ分布

固定系の場合と同様に、移動系の共存状態 ( $8/7 < p < 3/2$ ) におけるパターン特性について調べる。CAのサイズは  $300 \times 300$  で、初期配置の協調者比率は  $q=0.7$  である。パラメータ  $p$

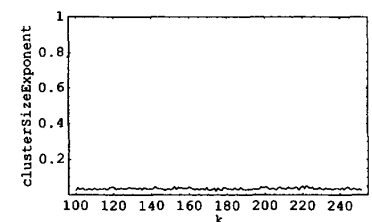
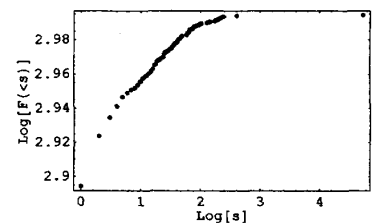
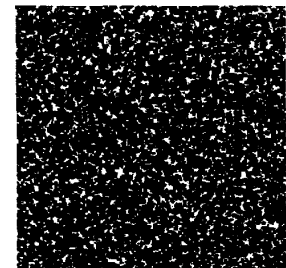


図8：移動系( $p=1.23$ )

の値が小さい領域 ( $8/7 < p < 5/4$ ) は、系の全域に拡がった最大クラスターで特徴付けられる。ランダムな初期配置から始まって、過渡的な状態を経て1つの巨大クラスターが形成されると、それ以後は定常な状態が保たれる。このパラメータ範囲では、最大クラスターの存在のためにクラスターのサイズ分布に明確なべき則を認めることができない。図8は、 $p=1.23$ での定常パターンのスナップショットと  $\log F(s) - \log s$  プロットおよびサイズ分布指数の時間変化である。協調者サイトのほとんどが属する最大クラスター以外のクラスターについてのサイズ分布にスケーリング領域が存在するとも言えるが、平均のクラスターサイズ分布指数は非常に小さく0.035である。

一方、パラメータ  $p$  の値が大きい範囲 ( $5/4 < p < 3/2$ ) では、最大クラスターは生じず、クラスターサイズの累積分布関数がべき則を満たすスケーリング領域が存在する。このパラメータ範囲は、領域A ( $5/4 < p < 4/3$ )、領域B ( $4/3 < p < 7/5$ )、領域C ( $7/5 < p < 3/2$ ) の3つに分けられる。

図9、図10、図11にそれぞれ  $p=1.29$  (領域A)、 $p=1.37$  (領域B)、 $p=1.45$  (領域C) の場合の定常パターンのスナップショットと  $\log F(s) - \log s$  プロットおよびサイズ分布指数の時間変化を示す。固定系の場合と同様に、100時間ステップから250ステップまでで時間平均す

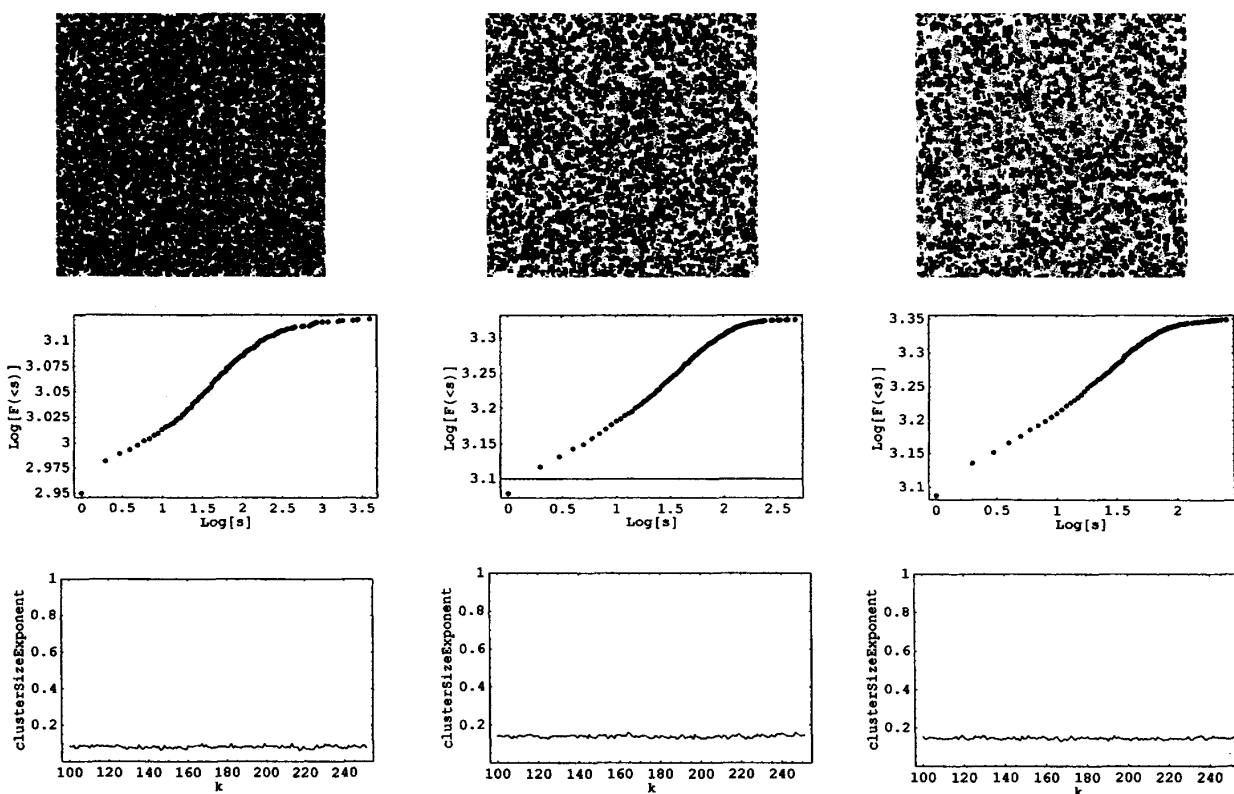


図9：移動系( $p=1.29$ )

図10：移動系( $p=1.37$ )

図11：移動系( $p=1.45$ )



表2. 移動系に対するクラスターサイズ分布指数

| $p$                             | 状態              | サイズ分布指数 $\alpha$<br>( )内は標準偏差値 |
|---------------------------------|-----------------|--------------------------------|
| $1 < p < \frac{8}{7}$           | 協調              | —                              |
| $\frac{8}{7} < p < \frac{7}{6}$ | 共存<br>(最大クラスター) | —                              |
| $\frac{7}{6} < p < \frac{6}{5}$ | 共存<br>(最大クラスター) | —                              |
| $\frac{6}{5} < p < \frac{5}{4}$ | 共存<br>(最大クラスター) | $p = 1.20$ 0.0356 (0.0050)     |
|                                 |                 | $p = 1.21$ 0.0349 (0.0045)     |
|                                 |                 | $p = 1.22$ 0.0350 (0.0050)     |
|                                 |                 | $p = 1.23$ 0.0350 (0.0054)     |
|                                 |                 | $p = 1.24$ 0.0354 (0.0041)     |
| $\frac{5}{4} < p < \frac{4}{3}$ | 共存 (A)          | $p = 1.25$ 0.0777 (0.0067)     |
|                                 |                 | $p = 1.26$ 0.0809 (0.0063)     |
|                                 |                 | $p = 1.27$ 0.0820 (0.0057)     |
|                                 |                 | $p = 1.28$ 0.0790 (0.0065)     |
|                                 |                 | $p = 1.29$ 0.0818 (0.0071)     |
|                                 |                 | $p = 1.30$ 0.0797 (0.0065)     |
|                                 |                 | $p = 1.31$ 0.0796 (0.0068)     |
|                                 |                 | $p = 1.32$ 0.0799 (0.0068)     |
|                                 |                 | $p = 1.33$ 0.0816 (0.0071)     |
| $\frac{4}{3} < p < \frac{7}{5}$ | 共存 (B)          | $p = 1.34$ 0.1340 (0.0059)     |
|                                 |                 | $p = 1.35$ 0.1344 (0.0065)     |
|                                 |                 | $p = 1.36$ 0.1342 (0.0062)     |
|                                 |                 | $p = 1.37$ 0.1394 (0.0069)     |
|                                 |                 | $p = 1.38$ 0.1338 (0.0057)     |
|                                 |                 | $p = 1.39$ 0.1331 (0.0061)     |
| $\frac{7}{5} < p < \frac{3}{2}$ | 共存 (C)          | $p = 1.40$ 0.1480 (0.0063)     |
|                                 |                 | $p = 1.41$ 0.1466 (0.0054)     |
|                                 |                 | $p = 1.42$ 0.1448 (0.0058)     |
|                                 |                 | $p = 1.43$ 0.1465 (0.0060)     |
|                                 |                 | $p = 1.44$ 0.1448 (0.0058)     |
|                                 |                 | $p = 1.45$ 0.1451 (0.0066)     |
|                                 |                 | $p = 1.46$ 0.1449 (0.0057)     |
|                                 |                 | $p = 1.47$ 0.1460 (0.0060)     |
|                                 |                 | $p = 1.48$ 0.1460 (0.0057)     |
|                                 |                 | $p = 1.49$ 0.1454 (0.0058)     |
| $\frac{3}{2} < p$               | 絶滅              | —                              |

ることによって系のクラスターサイズ分布指数を特定した。パラメータ  $p$  の値に対応するクラスターサイズ指数の平均値は表 2 に示される。パラメータ範囲の各領域での指数の平均値は、領域 (A) :  $\alpha=0.080$ , 領域 (B) :  $\alpha=0.135$ , 領域 (C) :  $\alpha=0.146$  である。

領域 A, B, C におけるサイズ分布指数の違いは、これらの領域におけるパターン形成の主なメカニズムに違いがあることを意味している。サイズ分布指数から見ると、領域 A と領域 B の間の違いが顕著である。パターン形成の傾向を考えると、離反者の中で孤立した協調者の小クラスター、あるいはその逆で、協調者の海の中で孤立した離反者の小クラスターの時間発展に注目することは有益である。それによると、 $p < 4/3$  では十文字型の 5 協力者クラスター (これを 5C と呼ぶ) が成長するが、 $p > 4/3$  では消滅する。この (5C) クラスターの成長と消滅が、領域 A と領域 B におけるパターン形成の特徴を分ける要素である可能性がある。

### 3.2 移動系の時系列相関

固定系のカオス的共存状態について協調者比率時系列の相関次元の推定を試みたが、特定することができなかった。相関指数の定常化が見せかけのものに過ぎないのかが問題である。ここで、固定系にランダムな移動を加えた移動系の共存状態について、同様に協調者比率時系列の相関指数の振る舞いを調べてみる。

図12と図13は、 $p=1.23$ での協調者比率時系列 (データ数2500) とその自己相関関数である。埋め込み座標の遅延時間としては、ここでも自己相関関数が最初に 0 になる時間ステップを採用する。

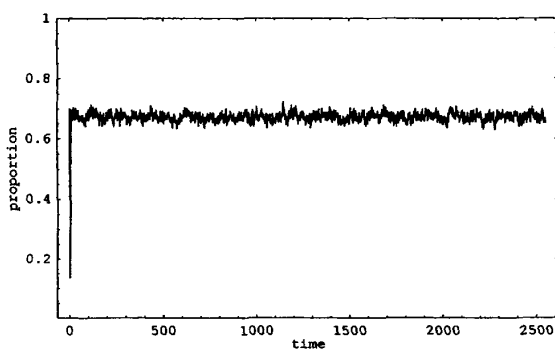


図12：固定系 ( $p=1.23$ ) の協調者比率時系列

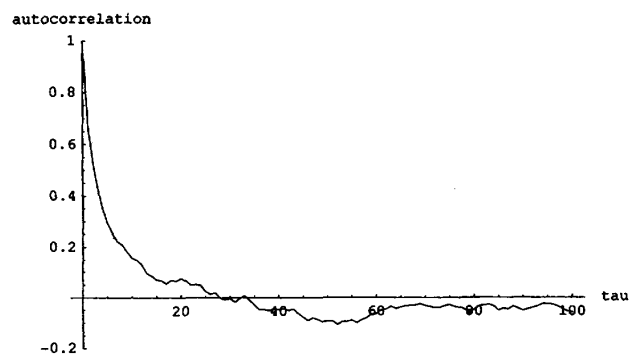


図13：固定系 ( $p=1.23$ ) の協調者比率自己相関関数

図14は、協調者比率時系列に対して、遅延時間30で埋め込みを行った場合の埋め込み次元  $m$  ( $2 \leq m \leq 15$ ) に対する相関指数の値をプロットした結果である。相関指数の平坦化は起こらない。 $m > 10$  では増加率が若干下がっているように見えるが、これはスケーリング領域が極端

に狭くなったことによる影響であり意味がない。このような相関指数の振舞いは、最大クラスターが存在する共存領域 ( $8/7 < p < 5/4$ ) では共通に見られる。これは、時系列データに非線形相関がないことを意味する。すなわち、時間変化の不規則性は系に取り入れられたランダムネスの効果である。

最大クラスターが存在しない共存領域 (A), (B), (C) での相関指数の振舞いを図15, 16, 17に示す。

いずれも異なる初期配置での時系列 (データ数2500) 5セットについての結果の平均である。領域 (A) ( $p=1.29$ ) および領域 (B) ( $p=1.37$ ) の場合は、時系列によって相関指数の振舞いにかかなりの違いが見られる。平均化された図15, 16では、 $m > 10$ で増加率が減少してはいるが、相関指数の定常化が起こっているとは言えない。これもカオスではないことの表れと考えられる。ところが領域 (C) ( $p=1.45$ ) の場合は  $m=12$ 以上で相関指数の定常化の傾向が見られる。定常化はほぼすべての時系列で見られるが、定常値は時系列によってかなりばらつきがある。いずれにしても、この定常値 ( $\approx 7.6$ ) はデータ数から推定可能と考えられる相関次元を超えている。しかしながら、この場合に相関指数の定常化が見られるということから、固定系の場合の定常化についてもカオスと結論することに無理があることになる。相関次元が存在してもかなり高次であるような場合には、GP法による解析には困難があることを意味している。

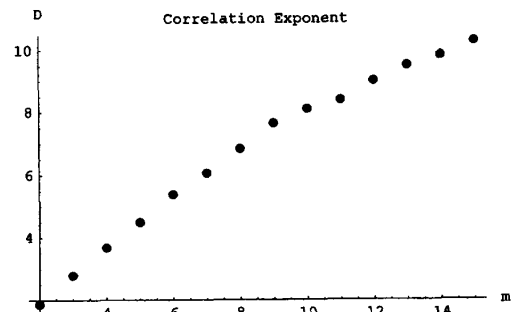


図14：移動系 ( $p=1.23$ ) の協調者比率時系列相関指数

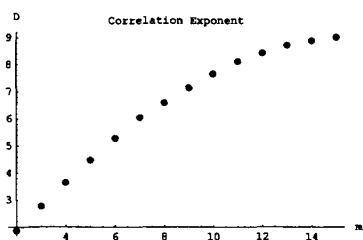


図15：移動系 ( $p=1.29$ ) の協調者比率時系列相関指数

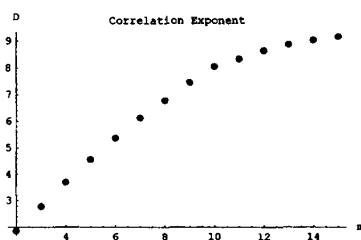


図16：移動系 ( $p=1.37$ ) の協調者比率時系列相関指数

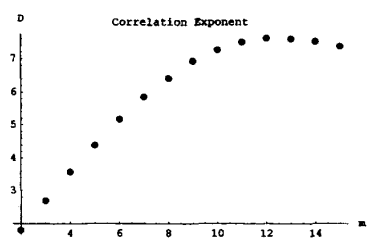


図17：移動系 ( $p=1.45$ ) の協調者比率時系列相関指数

#### 4 結論

固定系の共存状態における協調者クラスターについて、そのサイズ分布を調べた。クラスターサイズの累積分布関数はべき則に従うことがわかった。これは CA パターンの自己相似性を示すものである。クラスターサイズ分布指数はこのパラメータ領域ではほとんど一定で0.515を

得た。また、同じパラメータ領域において、協調者比率時系列の特性を調べた。自己相関関数の振る舞いから、時間ステップ間隔が5程度で相関は0になる。遅延時間を5としてGP法により相関指数を求めた。埋め込み次元  $m \geq 11$  に対して相関指数が定常化する傾向は見られるが、定常値は7.5以上になり相関次元を特定することはできなかった。

移動系の協調者クラスターのサイズ分布について次の結果が得られた。パラメータ範囲  $8/7 < p < 5/4$  では最大クラスターが存在し、全クラスターの累積分布にスケーリング領域は得られない。一方、パラメータ範囲  $5/4 < p < 3/2$  の共存状態はクラスターのサイズ分布の特徴をサイズ分布指数  $\alpha$  で特徴付けることができた。領域 (A) :  $\alpha = 0.080$ , 領域 (B) :  $\alpha = 0.135$ , 領域 (C)  $\alpha = 0.146$  である。固定系、移動系共に不規則に変化する共存状態のパターンがフラクタル性を示すことがわかった。これは外部からの強制によらず自発的に形成される共存パターンの特徴である。

固定系の共存状態における協調者比率時系列による相関次元の計算の妥当性を確かめるために、移動系においてGP法による同様の計算を行った。共存状態のパラメータ領域 ( $6/5 < p < 7/5$ ) では、相関指数の定常化は起こらない。時系列の不規則性がランダムな移動によって導入されたものであることを考えると当然の結果である。しかし、パラメータ領域 (C) ( $7/5 < p < 3/2$ ) では相関指数が平坦化するように見える。GP法では、非整数ブラウン運動などカオスでなくても有限の相関次元が得られることが知られており、GP法によって相関次元を特定してカオスを判定することは非常に困難であることを示している。

われわれの囚人のジレンマCAでは、個体の周りの空間的配置の如何によって、協調者の総利得は1, 2, ..., 8のいずれかであり、離反者の総利得は  $p, 2p, \dots, 8p$  のいずれかである。時間発展において第2近接サイト内での利得の比較で協調者と離反者の入れ替わりが起こり得るパラメータ  $p$  の値は、 $1 < p < 2$  の範囲では離散的な10個の値  $p = \{8/7, 7/6, 6/5, 5/4, 4/3, 7/5, 3/2, 8/5, 5/3, 7/4\}$  である。小さく区切られたパラメータ領域における動力学的特徴を区別するものは、協調者と離反者のクラスターの成長と消滅の局所的なメカニズムであると考えられる。そのような観点から、孤立した小クラスターの時間発展に注目すると、1離反者(1D)、十文字型の5離反者(5D)、 $3 \times 3$ の9離反者(9D)のクラスターはいずれも、 $6/5 < p < 7/5$  では(1D)  $\rightarrow$  (9D)  $\rightarrow$  (5D)  $\rightarrow$  (1D)の3周期の振動であり、 $2 \times 2$ の4離反者クラスターは消滅である。これらはいずれも、 $p > 7/5$ では静止状態になる。離反者の中に孤立した協調者クラスターについては、(4C)と(9C)は  $p < 3/2$ で成長し、 $p > 3/2$ ではそれぞれ消滅と静止になり、(5C)は  $p < 4/3$ で成長し、 $p > 4/3$ では消滅となる。したがって、パラメータ領域 (C) ( $7/5 < p < 3/2$ ) は、離散者小クラスターの静止と、協調者小クラスターの成長と

が共存する領域である。協調者と離反者の競合する振る舞いが個体のランダムな移動の影響を受けて興味深い振舞いを示すことが考えられる。

### 参 考 文 献

- [1] M.A.Nowak and R.M.May ; Nature **359**, 826 (1992), Int. J.Bifurcation Chaos **3**, 35 (1993)
- [2] M.A.Nowak, S.Bonhoeffer and R.M.May ; Proc. Natl. Acad.Sci.USA **91**, 4877 (1994)
- [3] A.L.Lloyd : Scientific American June, 80 (1995)
- [4] G.Szabo and G.Fath ; Physics Reports **446**, 97 (2007)
- [5] 脇黒長憲 ; 九州産業大学国際文化学部紀要 第23号, 77 (2002)
- [6] P. Grassberger and I. Procaccia ; Physica **D9**, 189 (1983), Phys. Rev. Lett.**50**, 346 (1983)
- [7] D.Ruell ; Proc. R. Soc. London **A427**, 241 (1990)