【論文】

ルイス・キャロル型の図形マジック

牟田正憲*・神﨑正則

Graphical magic of Lewis Carroll type

Masanori Muta and Masanori Kôzaki

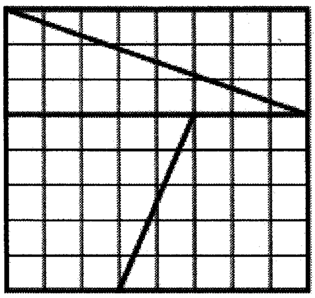
Abstract. First, we show a prototype of graphical magic of Lewis Carroll, which includes the optimal trick in the sequence of graphical magic concerning Fibonacci numbers. Second, we give a generalization of the above sequence and call it the sequence of graphical magic of Lewis Carroll type. Finally, we find a new graphical magic including an optimal trick in the sequences of graphical magic of Lewis Carroll type.

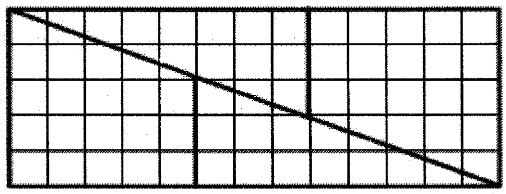
Graphical magic of Lewis Carroll type, Fibonacci numbers, Fibonacci decompositions

1．下の左図の8×8目のチェス盤目をした図を４個の紙片に切り取り、これらの組み合わせをかえて、下の右図のように並べかえた。ところが全体の面積は

$$8\times 8=64 \longrightarrow 5\times 13=65$$

と変化して、１平方単位の正方形だけ増加している。どうしてこのようなことが起こったのだろうか。このマジックをルイス・キャロルの図形マジック(注1)と呼ぶことにする([２])。





このようなことが起こった原因を明らかにする直接的な方法は、実際に8×8目の正方形を図のように正確に切り取って、5×13目の長方形の辺がきっちり重なるように並べかえることであろう。上の図の中に現れた三角形と四角形の辺を構成する４つの数の組$(3,5,8,13)=(u_4,u_5,u_6,u_7)$はフィボナッチ数(注2)からなっている。右図の長方形で、問題になるのは対角線であり、それ以外の線はきっちり一致している。三角形の斜辺の傾きは3/8、四角形のそれは2/5で、3/8＜2/5であるから空洞がある。実際、この空洞は下図のように平行四辺形で

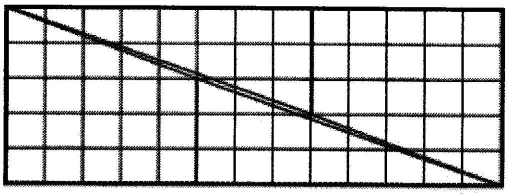
＊九州産業大学工学部数学教室

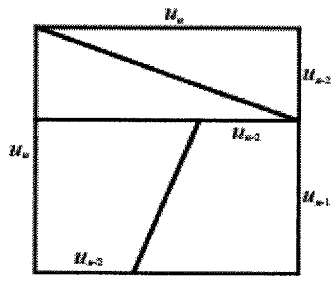
$$u_6^{\ 2} - u_5 \times u_7 = 8^2 - 5 \times 13 = -1$$

より、その面積は１である。この細長い平行四辺形の高さは

$$\frac{1}{\sqrt{u_4^{\ 2} + u_6^{\ 2}}} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 8^2}} = 0.1170\cdots$$

で、線の太さのために空洞が巧妙に隠されていたのである。





$u_n \times u_n$ 目の正方形の辺の長さ u_n $(n = 4, 5, \cdots)$ をかえて、$u_{n-1} \times u_{n+1}$ 目の長方形に並べかえて、上と類似の図形マジックをつくると

(i) 面積の変化の差は $u_n^{\ 2} - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^{n-1}$ （n が偶数ならば空洞、n が奇数ならば重なる）

(ii) 平行四辺形の空洞（重なる部分）の高さは $\dfrac{1}{\sqrt{u_{n-2}^{\ 2} + u_n^{\ 2}}} \to 0 \quad (n \to \infty)$

を満たす。正方形を大きくすると空洞（重なる部分）がだんだん目立たなくなることが予想される。長方形に並べかえたとき、平行四辺形の空洞を生じる（平行四辺形が重なる）に応じて、出現（消滅）マジックと呼ぶことにする。ルイス・キャロルの図形マジックは出現マジックである。［3］で考察したように、n が小さすぎても大きすぎても巧妙なマジックは作れない。n が小さすぎると、平行四辺形の空洞（重なる部分）を太い線でうめることができない。n が大きすぎると、細長い平行四辺形が線分に近くなって、トリックが見抜けない。従って、巧妙なマジックであるためには

(iii) 正方形を直接切り取って、長方形に並べかえたとき、トリックが見抜けるものでなくてはならない。その意味で、ルイス・キャロルの図形マジックはよくできたマジックである。

２．１節で、三角形と四角形の辺を構成する４つのフィボナッチ数の組

$$(u_{n-2}, u_{n-1}, u_n, u_{n+1})$$

からできる図形マジックについて考えてきた。必ずしもフィボナッチ数でない４つの正数の組からなる図形マジックを考える。

$A \times A$ 目の正方形に対して、$0 < x < \dfrac{A}{2}$ となる x をとる。三角形と四角形の辺を構成する４つの正数の組 $(x, A-x, A, 2A-x)$ からできる図形マジックを $\mathbf{G}(x, A)$ で表す。$A \times A$ 目の正方形を切り取り、$(A-x) \times (2A-x)$ 目の長方形に並べかえたとき、面積の差および平行四辺形の空洞（重なる部分）の高さ

を、それぞれ$\hat{S}(x, A)$、$\delta(x, A)$と表すと

$$\hat{S}(x, A) = -x^2 + 3Ax - A^2, \qquad \delta(x, A) = \frac{\left| -x^2 + 3Ax - A^2 \right|}{\sqrt{x^2 + A^2}}$$

となる。空洞または重なる部分が現れないのは、方程式$\hat{S}(x, A) = 0$解$x = \beta^2 A$のときである。ここに、$\beta^2 = (3 - \sqrt{5})/2(= 0.3819\cdots)$である。$\hat{S}(x, A)$は$0 < x < \dfrac{A}{2}$において増加関数である。従って、図形マジック$\mathbf{G}(x, A)$は$0 < x < \beta^2 A$ならば出現マジックで、$\beta^2 A < x < \dfrac{A}{2}$ならば消滅マジックである。

1節で考察した図形マジック$\mathbf{G}(u_{n-2}, u_n)$は次のように解釈される。

定理1． $A = u_n$ $(n = 4, 5, \cdots)$とする。$\hat{S}(x, u_n) = 0$の解 $\beta^2 u_n$（無理数）に近い自然数で、$\hat{S}(x, u_n)$の絶対値を最小にするxは$x = u_{n-2}$のときである。このとき

(2.1)
$$\hat{S}(u_{n-2}, u_n) = u_n{}^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^{n-1}$$

証明． $\varepsilon_n = \beta^2 u_n - u_{n-2}$とおくと

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\{\beta^2(\alpha^n - \beta^n) - (\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})\} = \beta^n$$

となる。このとき

(2.2)
$$\beta^2 u_n = u_{n-2} + \varepsilon_n, \quad \begin{cases} 0 < \varepsilon_n < 1 & (n = 2m) \\ -1 < \varepsilon_n < 0 & (n = 2m+1) \end{cases}$$

が成り立つ。ところで

$$\begin{aligned} \hat{S}(u_{n-2}, u_n) &= u_n{}^2 - u_{n-1} \times u_{n+1} = (-1)^{n-1} \\ \hat{S}(u_{n-2} + 1, u_n) &= v_n + (-1)^{n-1} - 1 \geq 5 \\ \hat{S}(u_{n-2} - 1, u_n) &= -v_n + (-1)^{n-1} - 1 \leq -11 \end{aligned}$$

従って、定理1を得る。 □

3． 定理1を一般化する。そのために、次のフィボナッチ分解定理を準備する（[1]）。

定理A. 任意の自然数nに対して、$u_j \leq n$ $(j \geq 2)$となる最大のフィボナッチ数u_jを$u_j = P(n)$と表すと、次が成り立つ。

(3.1)
$$n = u_{j(1)} + \cdots + u_{j(r-1)} + u_{j(r)},$$

(3.2) $$j(1)-j(2)\geq 2,\cdots,\ j(r-1)-j(r)\geq 2,\ j(r)\geq 2$$

を満たす自然数 $j(1),\cdots,\ j(r-1),\ j(r)$ がただ1組存在して、$u_{j(1)},\cdots,u_{j(r-1)},u_{j(r)}$ は

$$u_{j(1)}=P(n),\ u_{j(2)}=P(n-u_{j(1)}),\cdots,\ u_{j(r)}=P(n-u_{j(1)}-u_{j(2)}-\cdots-u_{j(r-1)})$$

によって与えられる。 □

上の定理のように、nをフィボナッチ数の非隣接和の形 (3.1) - (3.2) として表すことをnのフィボナッチ分解と呼び、rをその長さという。長さrが$r\geq 2$を満たすとき、nは尻尾をもつといい、フィボナッチ数 $u_{j(r)}$ をnの尻尾といって、$T(n)=u_{j(r)}$ と表す。$r=1$のとき（nがフィボナッチ数）、nには尻尾がないといい、$T(n)=n$とおく。

例1. 自然数n $(1\leq n\leq 15)$ のフィボナッチ分解は

$$\begin{array}{llllll} 1=u_2 & 2=u_3 & 3=u_4 & 4=u_4+u_2 & 5=u_5 & 6=u_5+u_2 \\ 7=u_5+u_3 & 8=u_6 & 9=u_6+u_2 & 10=u_6+u_3 & 11=u_6+u_4 & \\ 12=u_6+u_4+u_2 & 13=u_7 & 14=u_7+u_2 & 15=u_7+u_3 & & \end{array}$$

である。 □

尻尾をもつ自然数 $A=n$ に対して、図形マジック $\mathbf{G}(x,n)$ $(0<x<n/2)$ を考える。自然数n $(n\geq 4)$ のフィボナッチ分解を (3.1) - (3.2) とする。方程式 $\hat{S}(x,n)=0$ の解 $x=\beta^2 n$ は、(3.1) より

$$x=\beta^2 n=\beta^2 u_{j(1)}+\cdots+\beta^2 u_{j(r-1)}+\beta^2 u_{j(r)}$$

となる。$\varepsilon_{j(k)}\equiv\beta^2 u_{j(k)}-u_{j(k)-2}=\beta^{j(k)}$ （$k=1,\cdots,r-1,r$）を用いて

(3.3) $$x=\beta^2 n=\hat{n}+\varepsilon_n,\quad \hat{n}=u_{j(1)-2}+\cdots+u_{j(r-1)-2}+u_{j(r)-2},$$

(3.4) $$\varepsilon_n\equiv\sum_{k=1}^{r}\varepsilon_{j(k)}=\beta^{j(1)}+\cdots+\beta^{j(r-1)}+\beta^{j(r)}$$

とかける。$j(r)=2m$ $(m=1,2,\cdots)$ のとき、(3.4) より

(3.5) $$\beta^{2m}(1+\sum_{k=0}^{\infty}\beta^{2k+1})<\varepsilon_n<\beta^{2m}\sum_{k=0}^{\infty}\beta^{2k}$$

が成り立つ。(3.5) は $0<\varepsilon_n<-\beta^{2m-1}$ に帰着される。$j(r)=2m+1$ $(m=1,2,\cdots)$ のとき、同様にして、

$-\beta^{2m}<\varepsilon_n<0$ が得られるから

(3.6)
$$x=\beta^2 n=\hat{n}+\varepsilon_n,\quad \begin{cases} 0<\varepsilon_n<-\beta & (j(r)=2m) \\ -1-\beta<\varepsilon_n<0 & (j(r)=2m+1) \end{cases}$$

を得る。$j(r)=2$ の場合、$n=12,\ 25,\ 33,\ 38,\ 46,\ 59,\cdots$ は $x=\hat{n}+1$ のとき $\hat{S}(x,n)$ の絶対値を最小にする。

$j(r)\geq 3$ のとき、$\hat{S}(x,n)$ $(n\geq 4)$ の絶対値を最小にする自然数 x は $x=\hat{n}$ であることを示す。

(i) $j(r)=2m+1\ (m=1,2,\cdots)$ のとき、$-0.3819\cdots=-1-\beta<\varepsilon_n<0$ より

$$\left|\hat{S}(\hat{n}-1,n)\right|>\hat{S}(\hat{n},n)>0$$

が成り立つから、$\hat{S}(x,n)$ の絶対値を最小にする自然数 x は $x=\hat{n}$ である。

(ii) $j(r)=2m\ (m=2,3,\cdots)$ のとき、$0<\varepsilon_n<-\beta^3=-(2\beta+1)$ より

$$\hat{S}(\hat{n},n)<0,\quad \hat{S}(\hat{n}+1,n)>0$$

であるから

$$\begin{aligned} y &\equiv \hat{S}(\hat{n}+1,n)-\left|\hat{S}(\hat{n},n)\right| \\ &=2n^2-2(n-\hat{n})(2n-\hat{n})+3n-2\hat{n}-1 \end{aligned}$$

$n-\hat{n}=t$ とおくと

$$y=-2t^2-2(n-1)t+2n^2+n-1$$

(3.3) より、t の値のとりうる範囲は $-\beta n<t<-\beta n-(2\beta+1)$ であるから、この範囲で $y>0$ となる条件は

(3.7)
$$-\beta n-(2\beta+1)\leq\frac{-n+1+\sqrt{5n^2-1}}{2}$$

が成り立つことである。(3.7) は $n\geq\dfrac{3\sqrt{5}-4}{5}=0.5416\cdots$ に帰着される。従って、$\hat{S}(x,n)$ の絶対値を最小にする自然数 x は $x=\hat{n}$ である。

以上をまとめて、次の定理を得る。

定理２． 尻尾をもつ自然数 n に対して、n のフィボナッチ分解を (3.1) - (3.2) とし

$$\hat{n}=u_{j(1)-2}+\cdots+u_{j(r-1)-2}+u_{j(r)-2}$$

とおくと、(3.6) が成り立つ。このとき、$\mathbf{G}(\hat{n},n)$ をルイス・キャロル型図形マジックと呼ぶ。$j(r)\geq 3$ のとき、$\hat{S}(x,n)$ の絶対値を最小にする自然数 x は $x=\hat{n}$ である。 □

4．フィボナッチ数u_nに対して、$\hat{u}_n = u_{n-2}$と定めれば、定理２は尻尾をもたない場合も成り立つ。すなわち、各$n\,(\geq 4)$に対して、$\mathbf{G}(u_{n-2}, u_n)$はルイス・キャロル型図形マジックである。系列$\{\mathbf{G}(u_{n-2}, u_n)\}_{n=4,5,\cdots}$は１節で述べた性質 (i), (ii) を満たし、その系列の中で性質 (iii) に適合する図形マジックが冒頭に述べたルイス・キャロルのマジックである。このような類似した系列を見いだすために、定理２を適用して、$\mathbf{G}(\hat{n}, n)\,(j(r) = 2,\cdots,7)$の初めの$n$に対して３つの数の組$(\hat{n}, n, \hat{S}(\hat{n}, n))$の計算を行う（付２）。$j(r) = 2$における$\hat{n}$は上から順に$1,\ 2,\cdots$と自然数全体に渉っているから、原理的にすべての３つの数の組を求めることができる。例えば、$j(r) = 2$における$\hat{n} = 6,\ 7,\cdots,\ 15,\cdots$に対応する組$(\hat{n}, n, \hat{S}(\hat{n}, n))$を求めると

$$(6,17,-19),\ \ (7,19,-11),\ \ (8,22,-20),\ \ (9,25,-31),\ \ (10,27,-19),$$
$$(11,30,-31),\ \ (12,33,-45),\ \ (13,35,-29),\ \ (14,38,-44),\ \ (15,40,-25),\cdots$$

が得られる。

付２－数表の１行、２行は

(4.1) $$(\hat{n}, n) = (1,4),\ (3,7),\ (4,11),\ (7,18),\ (11,29),\cdots \quad \hat{S}(\hat{n}, n) = \pm 5,$$

(4.2) $$(\hat{n}, n) = (2,6),\ (4,10),\ (6,16),\ (10,26),\ (16,42),\cdots \ \hat{S}(\hat{n}, n) = \pm 4$$

である。また、付２－数表のk行の$\hat{n}$の数列を$\{f_n^{(k)}\}_{n=1,2,\cdots}$とすると、$\{f_n^{(k)}\}_{n=1,2,\cdots}$は

$$f_1^{(k)} = k = u_{i(1)} + \cdots + u_{i(t-1)} + u_{i(t)} \quad (k\text{のフィボナッチ分解}),$$

$$f_2^{(k)} = k_+ = u_{i(1)+1} + \cdots + u_{i(t-1)+1} + u_{i(t)+1} + u_1$$

とする一般フィボナッチ数列である[注3]。(4.1)、(4.2) の系列は、それぞれ$f_n^{(1)} = v_n,\ f_n^{(2)} = 2u_{n+1}$から得られたものである。

$\{\mathbf{G}(f_{n-2}{}^{(k)}, f_n{}^{(k)})\}_{n=3,4,\cdots}$は、各$k = 1, 2,\cdots$に対してルイス・キャロル型図形マジックの系列で、１節で述べた性質 (i), (ii) を満たす。すなわち、面積の変化の差および空洞 (重なる部分) の平行四辺形の高さは、それぞれ

(i) $$\hat{S}(f_{n-2}{}^{(k)}, f_n{}^{(k)}) = (f_n{}^{(k)})^2 - f_{n-1}{}^{(k)} f_{n+1}{}^{(k)} = (k^2 + kk_+ - k_+{}^2)(-1)^{n-1}$$

(ii) $$\delta(f_{n-2}{}^{(k)}, f_n{}^{(k)}) = \frac{\left|k^2 + kk_+ - k_+{}^2\right|}{\sqrt{(f_{n-2}{}^{(k)})^2 + (f_n{}^{(k)})^2}} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

を満たす。$f_n^{(k)}$がu_{n+p} (pは整数) の整数倍で表される場合はu_nと同値とみなし、これらと異なる例は十

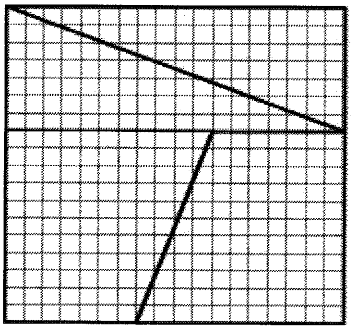
分多く存在する([3])(注4)。u_nと同値でない$f_n^{(k)}$から定まる図形マジックの系列$\{\mathbf{G}(f_{n-2}^{(k)}, f_n^{(k)})\}_{n=3,4,\cdots}$の中から巧妙な図形マジックがつくれるであろうか。1節の考察とルイス・キャロルの図形マジックをモデルとして、$\mathbf{G}(f_{n-2}^{(k)}, f_n^{(k)})$ が1節に述べた性質 (iii) に適合する図形マジックを

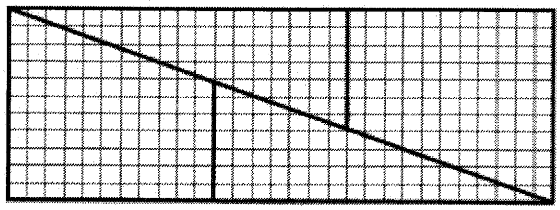
$$1^\circ \quad f_n^{(k)} \leq 20 \qquad\qquad 2^\circ \quad \varepsilon \cdot \delta(f_{n-2}^{(k)}, f_n^{(k)}) \doteqdot 0.1170\cdots, \quad \varepsilon \equiv \min\{8/f_n^{(k)},\ 1\}$$

を満たすものから選ぶと、$\mathbf{G}(7,18)$が候補となる(注5)。2°に対する計算は $0.1150\cdots$で、他の図形マジックのそれは0.22を超えている。18×18目の正方形から、次のように11×29目の長方形に並べかえる図形マジックをつくる。このとき、全体の面積は

$$18\times 18 = 324 \quad \longrightarrow \quad 11\times 29 = 319$$

と変化して、1平方単位の正方形が5個だけ減少している。





付1．フィボナッチ数列　初めの2項がa, bとして、前の2項を次々と加えてできる数列

$$a, \quad b, \quad a+b, \quad a+2b, \quad 2a+3b, \quad 3a+5b, \quad 5a+8b, \cdots$$

を一般フィボナッチ数列と呼び、$\{f_n(a,b)\}\ (n=1,2,\cdots)$と表す。特に、$(a,b)=(1,1),\ (1,3)$のとき、それぞれフィボナッチ数列、リュカ数列と呼び、$u_n = f_n(1,1),\quad v_n = f_n(1,3)$と表す。$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$とおくと、$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n),\quad v_n = \alpha^n + \beta^n$ で与えられて、次の等式が成り立つ。

(1) $u_n^{\ 2} - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^{n-1}$　　　　(2) $v_n = u_{n-1} + u_{n+1}$

u_n, v_n の初めの項は次の通りである。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
v_n	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322

付２． $\mathbf{G}(\hat{n}, n)$ の数表（$j(r) = 2, \cdots, 7$）

$\hat{n}$	n	$\hat{S}(\hat{n}, n)$	$\hat{n}$	n	$\hat{S}(\hat{n}, n)$
$j(r)=2$			$j(r)=3$		
$1 = u_2$	$4 = u_4 + u_2$	-5	$3 = u_3 + u_1$	$7 = u_5 + u_3$	5
$2 = u_3$	$6 = u_5 + u_2$	-4	$4 = u_4 + u_1$	$10 = u_6 + u_3$	4
$3 = u_4$	$9 = u_6 + u_2$	-9	$6 = u_5 + u_1$	$15 = u_7 + u_3$	9
$4 = u_4 + u_2$	$12 = u_6 + u_4 + u_2$	-16	$8 = u_5 + u_3 + u_1$	$20 = u_7 + u_5 + u_3$	16
$5 = u_5$	$14 = u_7 + u_2$	-11	$9 = u_6 + u_1$	$23 = u_8 + u_3$	11
$j(r)=4$			$j(r)=5$		
$4 = u_4 + u_2$	$11 = u_6 + u_4$	-5	$7 = u_5 + u_3$	$18 = u_7 + u_5$	5
$6 = u_5 + u_2$	$16 = u_7 + u_4$	-4	$10 = u_6 + u_3$	$26 = u_8 + u_5$	4
$9 = u_6 + u_2$	$24 = u_8 + u_4$	-9	$15 = u_7 + u_3$	$39 = u_9 + u_5$	9
$12 = u_6 + u_4 + u_2$	$32 = u_8 + u_6 + u_4$	-16	$20 = u_7 + u_5 + u_3$	$52 = u_9 + u_7 + u_5$	16
$14 = u_7 + u_2$	$37 = u_9 + u_4$	-11	$23 = u_8 + u_3$	$60 = u_{10} + u_5$	11
$j(r)=6$			$j(r)=7$		
$11 = u_6 + u_4$	$29 = u_8 + u_6$	-5	$18 = u_7 + u_5$	$47 = u_9 + u_7$	5
$16 = u_7 + u_4$	$42 = u_9 + u_6$	-4	$26 = u_8 + u_5$	$68 = u_{10} + u_7$	4
$24 = u_8 + u_4$	$63 = u_{10} + u_6$	-9	$39 = u_9 + u_5$	$102 = u_{11} + u_7$	9
$32 = u_8 + u_6 + u_4$	$84 = u_{10} + u_6 + u_6$	-16	$52 = u_9 + u_7 + u_5$	$136 = u_{11} + u_9 + u_7$	16
$37 = u_9 + u_4$	$97 = u_{11} + u_6$	-11	$60 = u_{10} + u_5$	$157 = u_{12} + u_7$	11

（注１）ルイス・キャロル (Lewis Carroll; 1832-1898) は『不思議の国のアリス』を書いたイギリスの数学教師。

（注２）フィボナッチ数列の定義と関連することは付１にまとめている。

（注３）数の組 $(k_+, k_+ + k + 1)$ は変形２山崩し（石とりゲーム）の後手必勝形と密接に関連している（[３]）。

（注４）$k = 1, 2, 5, 7$ の場合、[２]で与えられている。

（注５）小正方形の１辺の長さを１節のそれの約 ε 倍の目盛りで図を書く。

参考文献

[１] 岩堀長慶『２次行列の世界』岩波書店（1983）
[２] マーチン・ガードナー『数学マジック』（原著 1956）白揚社（1974）
[３] 神崎正則『数学の世界 A』九州産業大学国際文化学部講義ノート（2004）