

【論文】

超伝導電磁特性の数値解析

—磁化と交流帯磁率—

福田 有史*・湯元 渉*・阿久根 忠博†・坂本 進洋†

AC Susceptibilities of Granular Superconductors
—Magnetization and AC Susceptibility—

Yushi FUKUDA*, Wataru YUMOTO*, Tadahiro AKUNE†, Nobuyoshi SAKAMOTO†

Abstract: In-phase χ'_n and out-phase χ''_n components of n -th harmonic components of AC susceptibility under measuring parameters of a DC magnetic field B_{dc} , an amplitude B_a and a frequency f of the superimposed AC magnetic fields give a substantial information of the superconducting characteristics. In low- T_c metallic superconductors, χ'_1 and χ''_1 show a smooth transition and single peak. High- T_c oxide superconductors with anisotropic and grainy structures show a deformed complex characteristics.

After introducing the theoretical deviation by a simple Bean model, AC susceptibilities are numerically analyzed using the γ -model developed by Irie and Yamafuji which gave a fine description of magnetic field distribution in the superconductor. It shows a more clear insight of the dependence of susceptibilities on the DC magnetic field and the pinning parameters.

Keywords: AC susceptibility, Bean model, γ -model

1. はじめに

超伝導現象を応用するため、超伝導諸特性を実用レベルに向上する努力が続いている。銅酸化物超伝導体の発見により液体窒素温度 77 [K] で超伝導現象を実現できるようになり、臨界磁界も 100 [T] 以上と十分に高い値である。安価な液体窒素で高磁界応用が可能のように見える。しかし、応用上重要な抵抗ゼロで流すことのできる最大電流は液体ヘリウム温度では実用レベルにあるが、77 [K] ではまだ実現できていない。

第 2 種超伝導体では磁束が量子化して、量子化磁束線となり、通電電流によるローレンツ力のために運動し、電圧が発生、抵抗が現れることになる。この抵抗出現を阻止するためには磁束線が動かないよう、ピン止めすればよい。酸化物超伝導体のピン止め力の強化は超伝導応用物性の大きなテーマのひとつである。

非線形のピン止め効果が働くと、磁気的なヒステリシス特性が現れる。したがって、磁化特性、交流帯磁率特性は複雑な様相を呈するようになる。しかし、こ

れらの特性とピン止め作用の相互の関連を精査することでピン止め作用のメカニズムを明確にして、ピン止め力の強化に関する知見を増すことができる。

ピン止めと磁化特性について、従来から多くの報告がある¹⁻⁵⁾が、帯磁率特性と磁束分布についての報告は少ない。帯磁率測定は直流磁界、温度のほか、重畳する交流磁界の振幅、周波数、帯磁率の実部と虚部、 n 次のフーリエ成分などの多くの情報を含んでおり、ピン止め作用をより詳細に探求することができる。

この報告では超伝導体の磁束分布がどのような帯磁率特性を与えるか、数値的に検討した結果を述べる。

2. 磁束分布の磁化と交流帯磁率特性

2.1 磁化と交流帯磁率

超伝導体の座標 r における最大電流密度を $J_c(r)$ とすれば、磁界 $B(r)$ はマクスウェルの方程式 $\text{rot } B(r) = \mu_0 J_c(r)$ から求めることができる。厚さ $2d$ の超伝導平板の場合には、1次元となり

*工学研究科電気工学専攻

†電気工学科

$$dB/dx = \pm \mu_0 J_c(x) \quad (1)$$

この式から超伝導体内の磁束分布 $B(x)$ を求め、さらに平均磁束密度 $\langle B \rangle$

$$\langle B \rangle = \frac{1}{2d} \int_0^{2d} B(x) dx \quad (2)$$

から、磁化 M は

$$M = \langle B \rangle - B_0 \quad (3)$$

となる。ここで交流磁界 $B_{ac} = B_a \cos \omega t$ を加えたときの磁化 $M(t)$ をフーリエ級数展開し

$$M(t) = B_a \sum_{n=0}^{\infty} (\chi'_n \cos n\omega t + \chi''_n \sin n\omega t) \quad (4)$$

とすれば、帯磁率の n 次成分の実部 χ' と虚部 χ'' は

$$\chi'_n = \frac{1}{\pi B_a} \int_0^{2\pi} M(\omega t) \cos n\omega t d\omega t \quad (5)$$

$$\chi''_n = \frac{1}{\pi B_a} \int_0^{2\pi} M(\omega t) \sin n\omega t d\omega t \quad (6)$$

となる⁶⁾。即ち磁束分布 $B(x)$ から、磁化 M や帯磁率 χ'_n 、 χ''_n が求められる。

2.2 ビーンモデルによる磁束分布

厚さ $2d$ の超伝導平板における磁束分布 $B(x)$ をビーンモデル¹⁾ で考えよう。表面磁界を B_0 とすれば、ビーンモデルでは臨界電流密度 J_c が一定であるから

$$B(x) = B_0 \pm \mu_0 J_c (x - x_e) \quad (7)$$

となる。 x_e と符号 \pm は、各々の磁化過程で決定される。

以下、磁界の最大値を B_{\max} と最小値 B_{\min} 、それに中心到達磁界を B_p とする。ただし、 B_p は中心到達磁界で $\mu_0 d J_c$ で与えられる。表面磁界が B_0 の平均磁束密度 $\langle B_0 \rangle$ を減磁過程と増磁過程に分けて以下に示す。

2.2.1 大振幅 ($\Delta B_m (\equiv B_{\max} - B_{\min}) > 2B_p$)

交流磁界が中心にまで影響を及ぼす。このときの磁束分布と平均磁束を追跡しよう。減磁過程の磁束分布を Fig. 1 の (a) と (b) に、増磁過程を Fig. 2 の (d), (e) に示す。

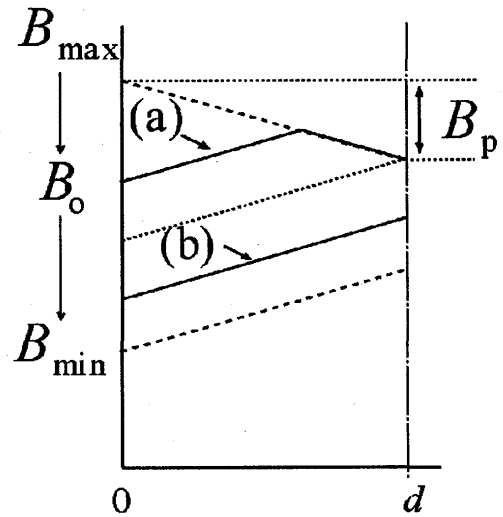


Fig. 1 Field distribution with decreasing field with large amplitude.

(a) 減磁 ($\Delta B_{\downarrow} (\equiv B_{\max} - B_0) < 2B_p$)

$$\langle B_0 \rangle = B_{\max} - \frac{B_p}{2} - \frac{1}{B_p} \left(\frac{B_{\max} - B}{2} \right)^2 \quad (8)$$

(b) 減磁 ($\Delta B_{\downarrow} > 2B_p$)

$$\langle B_0 \rangle = B + \frac{B_p}{2} \quad (9)$$

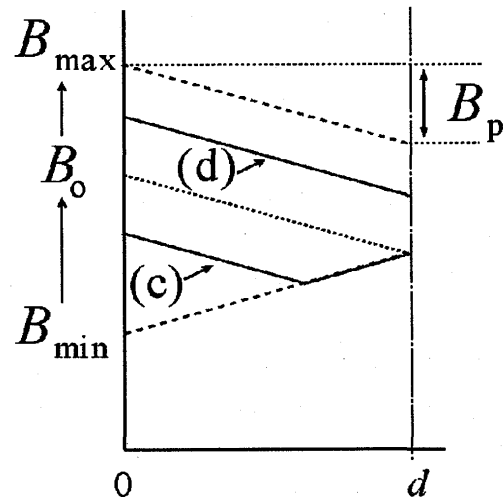


Fig. 2 Field distribution with increasing field with large amplitude.

(c) 増磁 ($\Delta B_{\uparrow} (\equiv B_0 - B_{\min}) < 2B_p$)

$$\langle B_0 \rangle = B_{\min} + \frac{B_p}{2} + \frac{1}{B_p} \left(\frac{B - B_{\min}}{2} \right)^2 \quad (10)$$

(d) 増磁 ($\Delta B_{\uparrow} > 2B_p$)

$$\langle B_o \rangle = B - \frac{B_p}{2} \quad (11)$$

2.2.2 小振幅 ($\Delta B_{\text{mm}} < 2B_p$)

大振幅時とは異なり表面の磁界が中心まで影響を及ぼさない。そのため、増磁の時には、Fig. 2 のような分布をとらず、Fig. 3 の分布をとる。

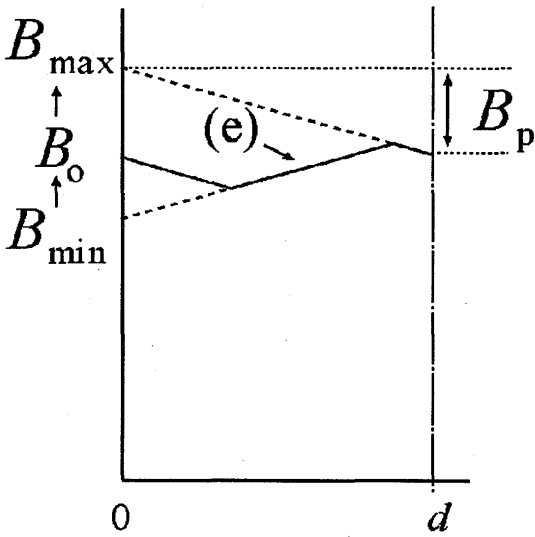


Fig. 3 Field distribution with increasing field with small amplitude.

(e) 増磁

$$\langle B_o \rangle = \langle B_{\text{min}} \rangle_{(2)} + \frac{1}{B_p} \left(\frac{B - B_{\text{min}}}{2} \right)^2 \quad (12)$$

ただし

$$\begin{aligned} \langle B_{\text{min}} \rangle_{(2)} &= \langle B_o \rangle_{(a)} \quad (B_o = B_{\text{min}}) \\ &= B_{\text{max}} - \frac{B_p}{2} - \frac{1}{B_p} \left(\frac{B_{\text{max}} - B_{\text{min}}}{2} \right)^2 \end{aligned} \quad (13)$$

2.3 交流帯磁率

式(8)~(13)の磁束分布を式(3)に代入し、磁化を求め、式(5)、(6)の積分により1次の χ' と χ'' は

$$\chi' = -1 + \frac{B_a}{2B_p} \quad : B_a \leq B_p \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{B_a}{2B_p} \right) \cos^{-1} \left(1 - \frac{2B_p}{B_a} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \left\{ 1 - \frac{4B_p}{3B_a} + \frac{4}{3} \left(\frac{B_p}{B_o} \right)^2 \right\} \left(\frac{B_o}{B_p - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (15)$$

: $B_a > B_p$

$$\chi'' = \frac{2B_a}{3\pi B_p} \quad : B_a \leq B_p \quad (16)$$

$$= \left(\frac{2B_p}{\pi B_a} \right) \left(1 - \frac{2B_p}{3B_a} \right) \quad : B_a > B_p \quad (17)$$

となる。 χ' と χ'' を B_a/B_p の関数としてFig. 4に示す。実測データでは温度特性が多用されるので、中心到達磁界 B_p の温度依存性を

$$B_p(T) = B_p(0) \{ 1 - (T/T_c)^2 \} \quad (18)$$

として、 $B_a/B_p(0) = 0.08$ の場合の温度特性をFig. 5に示す。金属系超伝導体で観測される交流帯磁率特性が再現されており⁷⁾、臨界温度近傍の虚部 χ'' のピーク特性と実部 χ' の遷移特性が現れている。

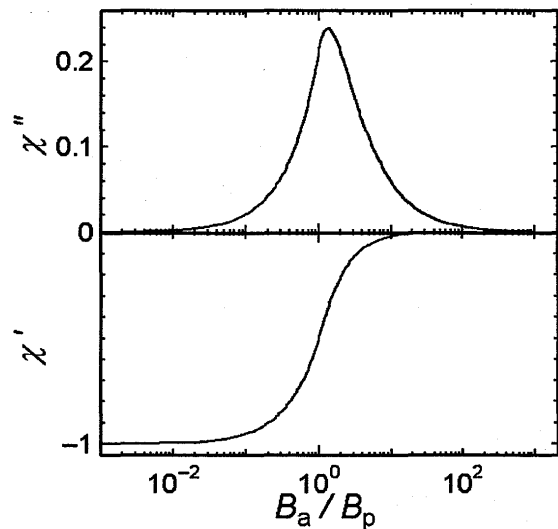


Fig. 4 Computed AC susceptibilities χ' and χ'' as a function of AC field B_a normalized by B_p .

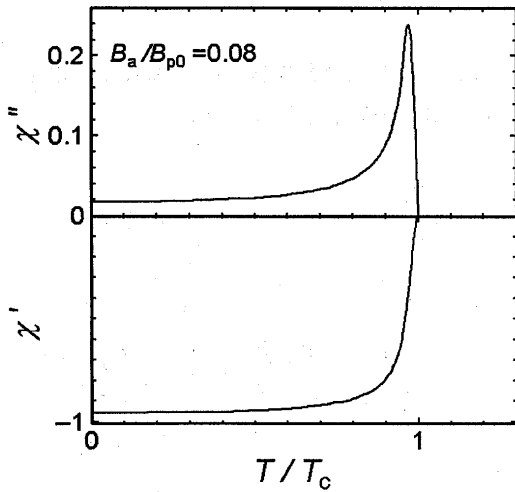


Fig. 5 Computed AC susceptibilities χ' and χ'' for $B_a/B_{p0} = 0.08$ as a function of temperature T reduced by the critical temperature T_c .

3. γ モデル

臨界電流密度 $J_c(B)$ の磁界変化を入れた入江・山藤の γ モデル⁵⁾ は、多くの超伝導体の磁化特性をよく表現する。ここで、前節のピンモデルと異なり、次式のピン止め特性を入れて、帯磁率を計算する。

$$F_p = J_c(B) \times B = \alpha B^\gamma = \pm \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial x} \quad (19)$$

ピン止め力 F_p と磁束勾配による磁気力のつり合いの式から磁束分布 $B(x)$ は、

$$B(x)^{2-\gamma} = B_0^{2-\gamma} \pm \mu_0 \alpha (2-\gamma) x \quad (20)$$

となり、中心到達磁界 B_p は、 $x = d$ で $B(d) = 0$ から

$$B_p^{2-\gamma} = \mu_0 \alpha (2-\gamma) d \quad (21)$$

となる。符号 \pm は超伝導体表面からの磁束の排出・侵入に対応する。式 (21) を式 (20) に代入すれば次の磁束分布の式となる。

$$B(x)^{2-\gamma} = B_0^{2-\gamma} \pm B_p^{2-\gamma} \frac{x}{d} \quad (22)$$

3.1 平均磁束密度

3.1.1 大振幅 $((B_{dc} + B_a)^{2-\gamma} - (B_{dc} - B_a)^{2-\gamma} \geq 2B_p^{2-\gamma})$

次に重畳した交流磁界 $B_{ac}(= B_a \cos \omega t)$ の変化に伴う磁束分布を Fig. 6 に示す。

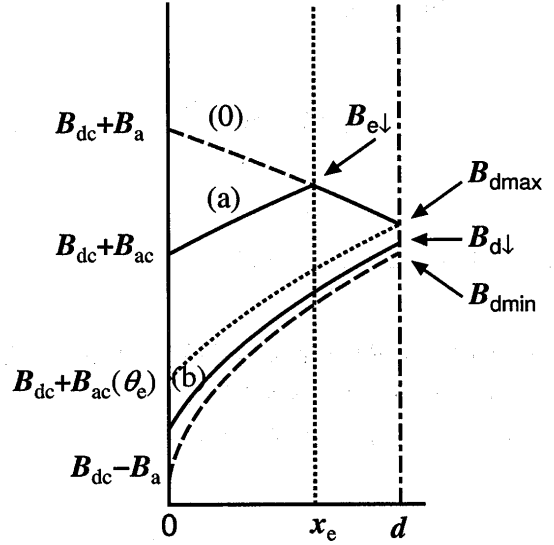


Fig. 6 Field distribution in the case of decreasing AC field with (a) small and (b) large amplitude.

(0) 初期の最大値 ($\theta = 0$)

最大値 ($B_{dc} + B_a$) の場合には、形状 (0) であり、内部へ向って単調に減少する。このときの磁束分布 $B(x)$ は

$$B(x)^{2-\gamma} = (B_{dc} + B_a)^{2-\gamma} - B_p^{2-\gamma} \frac{x}{d} \quad (23)$$

であり、平均磁束密度 $\langle B \rangle_{\max}$ は

$$\begin{aligned} \langle B \rangle_{\max} &= \frac{1}{d} \int_0^d B(x) dx \\ &= \frac{2-\gamma}{3-\gamma} \frac{1}{B_p^{2-\gamma}} \left\{ (B_{dc} + B_a)^{3-\gamma} - B_{d\max}^{3-\gamma} \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

ただし、 $B_{d\max}$ は中心での磁束密度で次式となる。

$$B_{d\max}^{2-\gamma} = (B_{dc} + B_a)^{2-\gamma} - B_p^{2-\gamma} \quad (25)$$

(a) 減磁 ($0 \leq \theta < \theta_e$)

B_{ac} が減少し、磁束密度の最大位置 x_e が Fig. 6 に示すように中心へ移動していく。その平均磁束密度は

$$\begin{aligned} \langle B \rangle &= \frac{2-\gamma}{3-\gamma} \frac{1}{B_p^{2-\gamma}} \left\{ 2B_{e\downarrow}^{3-\gamma} - B_{d\max}^{3-\gamma} \right. \\ &\quad \left. - (B_{dc} + B_{ac})^{3-\gamma} \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

ただし、

$$B_{e\downarrow}^{2-\gamma} = \frac{1}{2} \left\{ (B_{dc} + B_a)^{2-\gamma} + (B_{dc} + B_{ac})^{2-\gamma} \right\} \quad (27)$$

形状が (a) から (b) へ移り変わる位相 θ_e は、
 $x_e(\theta_e) = d$ の関係から

$$B_a \cos \theta_e = \left\{ (B_{dc} + B_a)^{2-\gamma} - 2B_p \right\}^{\frac{1}{2-\gamma}} - B_{dc} \quad (28)$$

となる。 θ_e の値はニュートン法を用いて容易に計算できる。形状 (a) の平均磁束密度 $\langle B \rangle$ は

$$\langle B \rangle = \frac{2-\gamma}{3-\gamma} \frac{1}{B_p^{2-\gamma}} \left\{ B_{dmax}^{3-\gamma} - (B_{dc} + B_{ac})^{3-\gamma} \right\} \quad (29)$$

(b) 減磁 ($\theta_e \leq \theta \leq \pi$)

さらに減少し、形状 (b) の場合の平均磁束密度 $\langle B \rangle$ は $x_e = d$ となり

$$\langle B \rangle = \frac{2-\gamma}{3-\gamma} \frac{1}{B_p^{2-\gamma}} \left\{ B_{d\downarrow}^{3-\gamma} - (B_{dc} + B_{ac})^{3-\gamma} \right\} \quad (30)$$

ここで

$$B_{d\downarrow}^{2-\gamma} = (B_{dc} + B_{ac})^{2-\gamma} + B_p^{2-\gamma} \quad (31)$$

である。

(c) 増磁 ($\pi \leq \theta < \pi + \theta_e$)

位相 θ が π を越して、交流磁界が増加し始め、Fig. 7 の形状 (c) になると

$$\langle B \rangle = \frac{2-\gamma}{3-\gamma} \frac{1}{B_p^{2-\gamma}} \left\{ (B_{dc} + B_{ac})^{3-\gamma} + B_{dmax}^{3-\gamma} - 2B_{e\uparrow}^{3-\gamma} \right\} \quad (32)$$

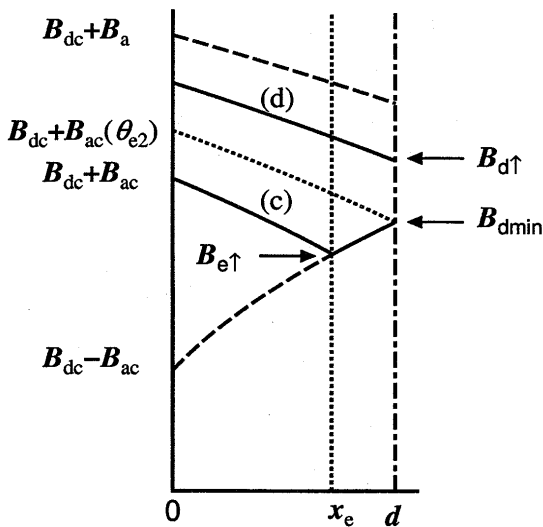


Fig. 7 Field distribution in the case of increasing field with (c) small and (d) large amplitude.

ここで

$$B_{dmin}^{2-\gamma} = (B_{dc} - B_a)^{2-\gamma} + B_p^{2-\gamma} \quad (33)$$

$$B_{e\uparrow}^{2-\gamma} = \frac{1}{2} \left\{ (B_{dc} - B_a)^{2-\gamma} + (B_{dc} + B_{ac})^{2-\gamma} \right\} \quad (34)$$

である。

(d) 増磁 ($\pi + \theta_e \leq \theta < 2\pi$)

Fig.7 の形状 (d) では

$$\langle B \rangle = \frac{2-\gamma}{3-\gamma} \frac{1}{B_p^{2-\gamma}} \left\{ (B_{dc} + B_{ac})^{3-\gamma} - B_{d\uparrow}^{3-\gamma} \right\} \quad (35)$$

ただし

$$B_{d\uparrow}^{2-\gamma} = (B_{dc} + B_{ac})^{2-\gamma} - B_p^{2-\gamma} \quad (36)$$

である。

3.1.2 小振幅 ($(B_{dc} + B_a)^{2-\gamma} - (B_{dc} - B_a)^{2-\gamma} \leq 2B_p^{2-\gamma}$)

交流磁界の振幅 B_a が小さくて、上の条件を満たすと磁束分布は Fig. 6 の形状 (b) となることなく増磁に転じる。

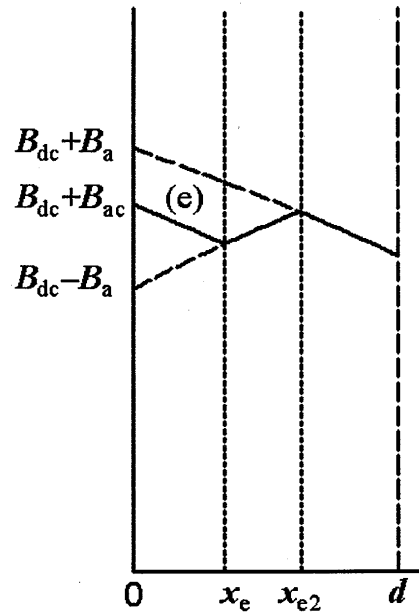


Fig. 8 Field distribution in the case of increasing AC field with small amplitude.

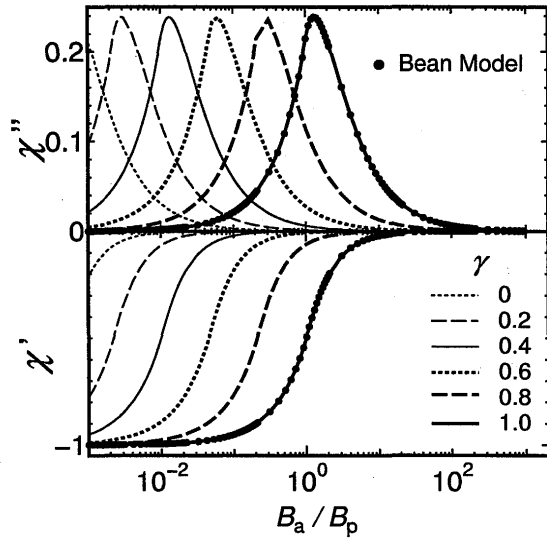


Fig. 9 Computed AC susceptibilities for various γ of 0 ~ 1.0 as a function of AC field B_a normalized by B_p . With decreasing γ , χ'' peak gradually shifts to low field. Curve for $\gamma = 1$ corresponds to that of Bean model.

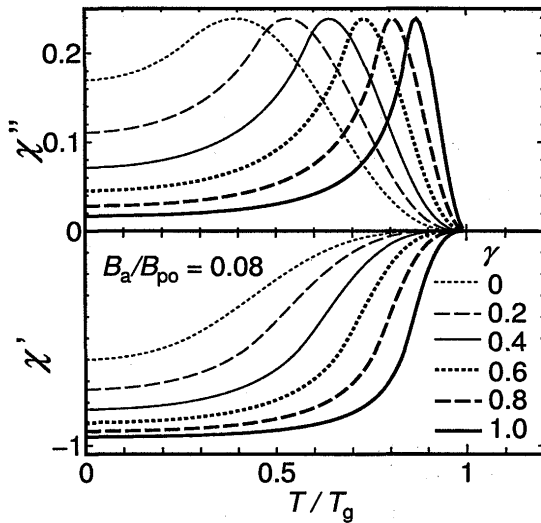


Fig. 10 Computed AC susceptibilities χ' and χ'' for various γ of 0 ~ 1.0 as a function of temperature T reduced by the critical temperature T_c , where $B_a/B_{p0} = 0.08$.

(e) 増磁 ($\pi \leq \theta < 2\pi$)

$$\langle B \rangle = \frac{2-\gamma}{3-\gamma} \frac{1}{B_p^{2-\gamma}} \left\{ (B_{dc} + B_{ac})^{3-\gamma} + 2B_{em}^{3-\gamma} - 2B_{e\uparrow}^{3-\gamma} - B_{dmax}^{3-\gamma} \right\} \quad (37)$$

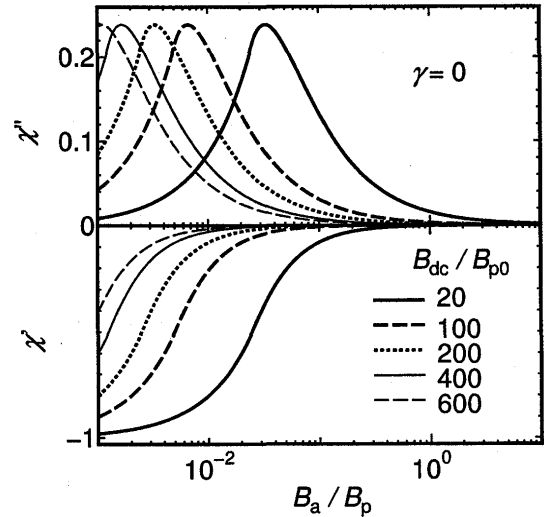


Fig. 11 Computed AC susceptibilities for $\gamma = 0$ as a function of AC field B_a normalized by B_p . With increasing B_{dc} from 0.1 to 3, χ'' gradually shifts to low field.

ただし

$$B_{em}^{2-\gamma} = \frac{1}{2} \left\{ (B_{dc} + B_a)^{2-\gamma} + (B_{dc} - B_a)^{2-\gamma} \right\} \quad (38)$$

$B_{e\uparrow}$ は式 (34) である。

3.2 交流帯磁率

前項で求めた各過程の平均磁束密度 $\langle B \rangle$ から、磁化 M を求め式 (5)、(6) の数値積分によって、実部 χ' 、虚部 χ'' を得る。

(a) パラメータ γ の効果

χ' と χ'' の磁界変化を Fig. 9 に示す。 γ をパラメータとして 0 ~ 1 と変化している。磁界依存では χ'' のピーク特性が低磁界のほうへシフトする。また、 χ' の立ち上がりの位置が低磁界へシフトする。 $\gamma = 1$ の特性はピーンモデルと一致する。中心到達磁界 B_p のパラメータ γ 依存性を表しており、磁界分布が χ'' のピークの高さにはほとんど影響しないことを示している。

次に式 (18) を用いて、横軸を温度にとり Fig. 10 に示す。小さい γ では B_p が小さくなり低温側にシフトする。

(b) 直流磁界 B_{dc} の効果

ピーンモデルの交流帯磁率特性では臨界電流密度 J_c は一定であり、直流磁界依存性はない。 γ モデルでは J_c が B_{dc} に依存し、交流帯磁率特性も変化する。 $\gamma = 0$

の場合の交流帯磁率特性の磁界特性 (Fig. 11) と温度特性 (Fig. 12)、及び $\gamma = 0.5$ の場合の磁界特性 (Fig. 13) と温度特性 (Fig. 14) を示す。いずれも B_{dc} によって大きな特性変動があるが、 $\gamma = 0.5$ のほうが小さくなっている。図示していないが $\gamma = 1$ では B_{dc} 依存のない一定の特性になっている。

このように、 γ モデルを用いれば、交流帯磁率の温度・磁界特性を説明することが出来る。

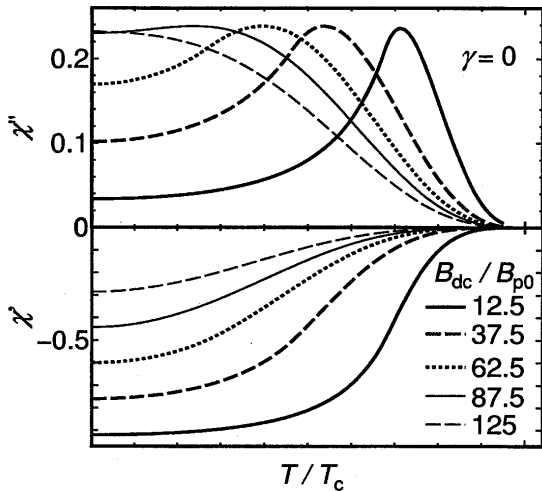


Fig. 12 Computed AC susceptibilities for $\gamma = 0$ as a function of temperature T reduced by the critical temperature T_c . With increasing B_{dc}/B_{p0} from 12.5 to 125, χ'' peak gradually broadens and shifts to low field.

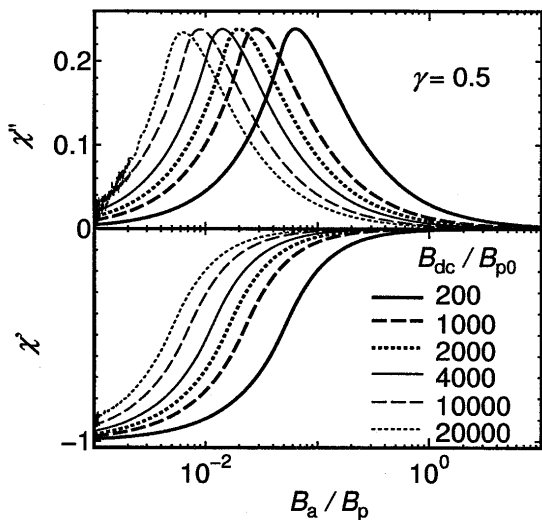


Fig. 13 Computed AC susceptibilities for various B_{dc}/B_{p0} of 200 ~ 20000 as a function of AC field B_a normalized by B_p , where $\gamma = 0.5$. With decreasing B_{dc}/B_{p0} , χ'' peak gradually shifts to low field.

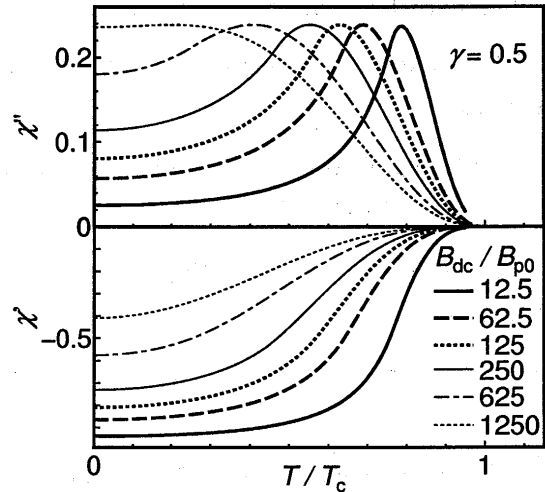


Fig. 14 Computed AC susceptibilities for various B_{dc}/B_{p0} of 12.5 ~ 1250 as a function of temperature T reduced by the critical temperature T_c , where $\gamma = 0.5$. With decreasing B_{dc}/B_{p0} , χ'' peak gradually broadens and shifts to low field.

4. まとめ

超伝導体の交流帯磁率特性は、ピンモデルによれば、交流磁界の振幅が中心到達磁界を越えて増大するにつれて、虚部は、ピーク特性、実部は滑らかな遷移特性を示す。等方的で均一な超伝導体の場合は、実測特性を良く説明する。しかし、不均一で、特に酸化物超伝導体の場合には、虚部に第2ピークが現れたり⁸⁾、実部の遷移も滑らかでなく、ショルダー特性などが現れる。これらは表面層やグレイン構造⁹⁾に基づく得意な磁束分布がその一因と考えられる。本論では、磁束分布と交流帯磁率の関係について臨界電流密度 J_c が均一で一定とする従来のピンモデルの解析解について述べ、より一般化を目指し、 γ モデルを用いて、 J_c の不均一性、温度・磁界依存性を入れた解析を試みた。解析的計算ができないので数値積分を行った。その結果はピンパラメータ γ や磁界、温度で変化する特性を得て、多くの実例データを説明し得ると考える。

実例データとの比較、表面層やグレイン構造を考慮した検討は今後の課題である。

参考文献

- 1) C.P. Bean : Phys. Rev. Lett. 8 (1962) 250.

- 2) H. London : Phys. Lett. **6** (1963) 162.
- 3) J. Silcox and R. W. Rollins : Rev. Mod. Phys. **36** (1964) 52.
- 4) Y. B. Kim, C. F. Hempstead and A. R. Strnad : Phys. Rev. **129** (1963) 528.
- 5) F. Irie and K. Yamafuji : J. Phys. Soc. Jpn. **23** (1967) 225.
- 6) 松下照男 : “磁束ピンニングと電磁現象” (産業図書, 東京, 1994).
- 7) T. Akune, H. Abe, A. Koga, N. Sakamoto and Y. Matsumoto : Physica C **378-381** (2002) 234.
- 8) L. Fabrega, A. Sin, A. Calleja and J. Fontcuberta : Phys. Rev. B **61** (2000) 9793.
- 9) M. Kubo, T. Akune, N. Sakamoto, H.R. Khan and K. Lüders : submitted to Physica C.